Exercice 10 (pour la question 0) voir en fin de corrigé)

1) Dans le système complet d'événements $(A_n, \bar{A}_n)$ on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(\bar{A}_n) \quad (*)$$

Or $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que le bit A soit resté à la valeur 0 de l'étape n à l'étape $n+1$, d'après l'énoncé $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p$.

De même, $\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que le bit A ait été modifié de 1 à 0 entre l'étape n et l'étape $n+1$, donc $\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = q$.

Dès lors, en utilisant que $\mathbb{P}(\bar{A}_n) = 1-\mathbb{P}(A_n)$, la relation $(*)$ donne :

$$a_{n+1} = (1-p)a_n + q(1-a_n)$$
$$= \boxed{(1-p-q)a_n + q}$$

2) La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique. Pour $l \in \mathbb{R}$, on résout :

$$l = (1-p-q)l + q \iff (p+q)l = q \iff l = \frac{q}{p+q}$$

On introduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = a_n - \frac{q}{p+q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a'_{n+1} = a_{n+1} - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)a_n + q - \frac{q}{p+q}$$
$$= (1-p-q)\left(a'_n + \frac{q}{p+q}\right) + q - \frac{q}{p+q}$$
$$= (1-p-q)a'_n + \cancel{\frac{(1-p-q)q + q(p+q) - q}{p+q}}$$
$$= (1-p-q)a'_n$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = (1-p-q)^n a'_0 = (1-p-q)^n\left(a_0 - \frac{q}{p+q}\right)$

et donc $a_n = a'_n + \frac{q}{p+q} = \boxed{(1-p-q)^n\left(a_0 - \frac{q}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q}}$

3) Comme $0<p<1$ et $0<q<1$ on a $0<p+q<2$

donc $-2<-p-q<0$ et donc $-1<1-p-q<1$.

Ainsi $(1-p-q)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par suite $\boxed{a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{q}{p+q}}$

(pour la question 4) voir en fin de corrigé)

5) La probabilité p_n est la probabilité que le bit A soit un 0 à l'étape n sachant que c'était un 0 à l'étape 0, c'est-à-dire que

$\boxed{p_n = \mathbb{P}_{A_0}(A_n)}$ De même, $\boxed{p'_n = \mathbb{P}_{\overline{A_0}}(\overline{A_n})}$

6) La probabilité p_n est la probabilité de l'évènement A_n lorsqu'on sait que A_0 est réalisé, c'est-à-dire lorsqu'on a $a_0=1$, ainsi la valeur de p_n est la valeur de a_n lorsque $a_0=1$ c'est-à-dire

$$\boxed{p_n = (1-p-q)^n\left(1-\frac{p}{p+q}\right)+\frac{q}{p+q} = \frac{q}{p+q}\left(1+(1-p-q)^n\right)}$$

De même, p'_n est la valeur de $1-a_n$ lorsque $a_0=0$ c'est-à-dire

$$\boxed{p'_n = 1-\left((1-p-q)^n\left(-\frac{p}{p+q}\right)+\frac{q}{p+q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(1+(1-p-q)^n\right)}$$

7) Dans cette partie, on sait que le message envoyé est $[0,1]$ c'est-à-dire que l'évènement $A_0\cap\overline{B_0}$ est réalisé. L'évènement "le message reçu à la $n^{\text{ème}}$ étape est le bon" s'écrit alors $A_n\cap\overline{B_n}$, et on cherche à déterminer $\mathbb{P}_{A_0\cap\overline{B_0}}(A_n\cap\overline{B_n})$

Comme les modifications du bit A et du bit B sont indépendantes, les évènements A_0 et $\overline{B_0}$, ainsi que les évènements $A_0\cap A_n$ et $\overline{B_0}\cap\overline{B_n}$ sont indépendants. D'après la proposition (*) on a donc

$$\mathbb{P}_{A_0\cap\overline{B_0}}(A_n\cap\overline{B_n}) = \mathbb{P}_{A_0}(A_n)\times\mathbb{P}_{\overline{B_0}}(\overline{B_n}) = \boxed{p_n\times p'_n}$$

8) L'évènement "le message reçu à la $n^{\text{ème}}$ étape contient exactement 1 erreur" s'écrit $(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) \cup (A_n \cap B_n)$. En effet il correspond à la réception des messages $[1,1]$ ou $[0,0]$.

Comme $(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) \cap (A_n \cap B_n) = \emptyset$ on a

$$\mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{B_0}}\left((\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) \cup (A_n \cap B_n)\right) = \mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{B_0}}(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) + \mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{B_0}}(A_n \cap B_n)$$

On utilise ensuite la proposition $(*)$: on a A_0 et $\overline{B_0}$ indépendants, $A_0 \cap \overline{A_n}$ et $\overline{B_0} \cap \overline{B_n}$ indépendants et $A_0 \cap A_n$ et $\overline{B_0} \cap B_n$ indépendants donc :

$$\mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{B_0}}(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) = \mathbb{P}_{A_0}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_0}}(\overline{B_n})$$

$$= (1 - \mathbb{P}_{A_0}(A_n))\, \mathbb{P}_{\overline{B_0}}(\overline{B_n}) = (1-p_n)\, p'_n$$

$$\mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{B_0}}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}_{A_0}(A_n) \times \mathbb{P}_{\overline{B_0}}(B_n)$$

$$= \mathbb{P}_{A_0}(A_n) \times (1 - \mathbb{P}_{\overline{B_0}}(\overline{B_n})) = p_n (1 - p'_n)$$

Ainsi la probabilité recherchée est

$$(1-p_n)\, p'_n + p_n(1-p'_n) = \boxed{p_n + p'_n - 2 p_n p'_n}$$

9) On cherche $\mathbb{P}_{A_n}(A_0)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_0) = \mathbb{P}_{A_0}(A_n) \times \frac{\mathbb{P}(A_0)}{\mathbb{P}(A_n)} = p_n \times \frac{a_0}{a_n}$$

Et comme le message initial est choisi au hasard on a $a_0 = \frac{1}{2}$

et donc $a_n = (1-p-q)^n \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q}$.

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}_{A_n}(A_0) = \boxed{\frac{1}{2}\, \frac{(1-p-q)^n\left(1 - \frac{p}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q}}{(1-p-q)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q}}}$$

10) On cherche $\mathbb{P}_{A_n \cap \overline{B_n}}(A_0 \cap \overline{B_0})$. D'après la proposition (*) on a, puisque A_n et $\overline{B}_n$ ainsi que $A_n \cap A_0$ et $\overline{B}_n \cap \overline{B}_0$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}_{A_n \cap \overline{B}_n}(A_0 \cap \overline{B}_0) = \mathbb{P}_{A_n}(A_0)\, \mathbb{P}_{\overline{B}_n}(\overline{B}_0)$$

Et d'après la formule de Bayes, comme précédemment :

$$\mathbb{P}_{\overline{B}_n}(\overline{B}_0) = \mathbb{P}_{\overline{B}_0}(\overline{B}_n) \times \frac{\mathbb{P}(\overline{B}_0)}{\mathbb{P}(\overline{B}_n)} = p'_n \times \frac{1-\mathbb{P}(B_0)}{1-\mathbb{P}(B_n)} = p'_n \times \frac{1/2}{1-a_n}$$

et donc $$\mathbb{P}_{\overline{B}_n}(\overline{B}_0) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{p}{p+q}\left(1+(1-p-q)^n\right)}{1-(1-p-q)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{p+q}\right)-\frac{q}{p+q}}$$

Finalement, la probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}_{A_n \cap \overline{B}_n}(A_0 \cap \overline{B}_0) = \boxed{\frac{1}{4} \times \frac{\frac{q}{p+q}\left(1+(1-p-q)^n\right)}{(1-p-q)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{p+q}\right)+\frac{q}{p+q}} \times \frac{\frac{q}{p+q}\left(1+(1-p-q)^n\right)}{1-(1-p-q)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{p+q}\right)-\frac{q}{p+q}}}$$

o) Par définition, $$\mathbb{P}_{A \cap B}(A' \cap B') = \frac{\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A'\cap B'))}{\mathbb{P}(A\cap B)} = \frac{\mathbb{P}((A\cap A')\cap(B\cap B'))}{\mathbb{P}(A\cap B)}$$

Comme $A\cap A'$ et $B \cap B'$ sont indépendants : $\mathbb{P}((A\cap A')\cap(B\cap B')) = \mathbb{P}(A\cap A')\,\mathbb{P}(B\cap B')$

Et comme A et B sont indépendants : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Ainsi, $$\mathbb{P}_{A\cap B}(A'\cap B') = \frac{\mathbb{P}(A\cap A')\,\mathbb{P}(B\cap B')}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap A')}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(B\cap B')}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_A(A')\,\mathbb{P}_B(B')$$

4) Comme $p > q$ on a $p+q > 2q$ donc (puisque $p+q>0$) : $1 > \frac{2q}{p+q}$ donc $\boxed{\frac{1}{2} > \frac{q}{p+q}}$. Comme la limite de (a_n) est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, à partir d'un certain rang on a $a_n < \frac{1}{2}$. Ainsi, après un grand nombre d'étapes, <u>il est plus probable que le bit A contienne un 1 qu'un 0.</u> (C'est naturel puisque $p > q$ signifie que les 0 ont plus tendance à être modifiés en 1 que les 1 en 0).

10/10