Mathématiques - mercredi 3 avril 2024
Devoir nº7 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.**
- **L'exercice 1 est à rédiger directement sur cette page qu'il faudra rendre.**

NOM :

PRENOM :

Exercice 1 (espaces vectoriels)**.** (/ 10 pts)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, u_2, u_3 \in E$.
   (a) Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. (/ 1 pt)
   (b) Démontrer que $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est un sous-espace vectoriel de E. (/ 3 pts)
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y + 3z = 0\}$.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en :
   (a) revenant à la définition. (/ 3 pts)
   (b) exhibant une famille génératrice de F. (/ 3 pts)

(possibilité d'écrire au dos de cette page)

Exercice 2 (des questions de cours)**.**

1. Donner sans justification, l'ensemble de définition, de dérivabilité, la dérivée et les limites aux bords de son ensemble de définition de la fonction arctan.
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \ln(1 - e^{x+1})$ puis justifier que f est continue sur cet ensemble.
3. Combien y a-t-il d'anagrammes de BLABLA ? *On ne demande pas que ces anagrammes aient un sens en Français. On attend l'explication de la façon de compter.*

Exercice 3 (Python)**.**
Dans tout cet exercice, on considère uniquement des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant `True` si cette matrice est diagonale et `False` sinon.
3. Donner sans justifier une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit inversible. Donner alors la matrice D^{-1}.
4. Écrire une fonction Python `inverse_diag` prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant son inverse si A est à la fois diagonale et inversible, et renvoyant un message d'erreur sinon.

Exercice 4 (une suite implicite)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation $(E_n) : e^x = x^n$.
On introduit la fonction $f_n : x \longmapsto 1 - x^n e^{-x}$. Un nombre réel x est donc solution de (E_n) si et seulement si $f_n(x) = 0$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que $f_n(n) \leq 0 \iff n \geq e$.
   (c) En déduire que (E_1) et (E_2) n'ont pas de solution sur $\mathbb{R}^+$.
2. Dans la suite on suppose que $n \geq 3$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet deux solutions sur $\mathbb{R}^+$, notées u_n et v_n et telles que $1 \leq u_n \leq n \leq v_n$.
   (b) Quelle est la limite de (v_n) ?
   (c) Déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire le sens de variation de (u_n).
   (d) Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
   (e) Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   (f) Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

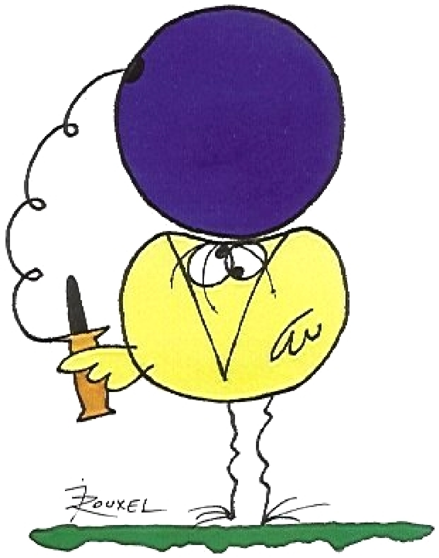
Exercice 5 (maximiser les faces)**.**
On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre truquée de sorte qu'elle donne Face avec probabilité $p > \frac{1}{2}$.
On effectue une série de trois lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer.
On gagne le jeu lorsqu'on obtient Face au troisième lancer.
Le but de l'exercice est de comparer trois stratégies et de décider laquelle maximise nos chances de gagner le jeu.

On note pour $k \in [\![1,3]\!]$:

- E_k l'événement "on choisit la pièce équilibrée au k-ème lancer", et
- F_k l'événement "on obtient Face au k-ème lancer".

0. Exprimer $\mathbb{P}(F_k)$ en fonction de p et de $\mathbb{P}(E_k)$.
1. Stratégie 1 : on suppose qu'à chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.
   Montrer que $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{2p+1}{4}$.
2. Stratégie 2 : au premier lancer on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient Face, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{E_1}(E_3)$ et $\mathbb{P}_{\overline{E_1}}(E_3)$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(E_3)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{4p^2+3}{8}$.
3. Stratégie 3 : au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chacun des lancers suivants, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu Face, sinon, on change de pièce.
   (a) Pour $k \in \{1,2\}$, exprimer $\mathbb{P}(E_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_k)$ et de p.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(E_3)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{8p^3-4p^2+6p+5}{16}$.
4. Comparer les stratégies 1, 2 et 3.

Les devises Shadok



EN ESSAYANT CONTINUELLEMENT
ON FINIT PAR RÉUSSIR. DONC:
PLUS ÇA RATE, PLUS ON A
DE CHANCES QUE ÇA MARCHE.