Comment calculer une intégrale ?
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire que $F' = f$.

Exercice 1 (premiers exemples)
Il faut connaître des primitives des fonctions simples (polynômes, exponentielle, cosinus, sinus). Pour cela, il faut "lire à l'envers" le tableau donné dans la feuille de cours sur les dérivées usuelles.

- $\int_0^5 e^t\,dt = \Big[e^t \Big]_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$ car $F(t) = e^t$ vérifie $F'(t) = e^t$
- $\int_0^1 t\,dt = \Big[\frac{t^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ car $F(t) = \frac{t^2}{2}$ vérifie $F'(t) = t$
- $\int_{-2}^3 5\,dt = \Big[5t \Big]_{-2}^3 = 5 \times 3 - 5 \times (-2) = 25$ car $F(t) = 5t$ vérifie $F'(t) = 5$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\,dt = \Big[\sin(t) \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ car $F(t) = \sin(t)$ vérifie $F'(t) = \cos(t)$
- $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = \Big[-\cos(t) \Big]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -2$ car $F(t) = -\cos(t)$ vérifie $F'(t) = \sin(t)$

Exercice 2 (par linéarité)
Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt.$$

Ainsi, si $F' = f$ et $G' = g$ sur $[a, b]$ alors on peut écrire au choix :

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,dt = \begin{cases} \Big[F(t) + \lambda G(t)\Big]_a^b = F(b) + \lambda G(b) - F(a) - \lambda G(a) \\ \text{ou} \\ \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b + \lambda \Big[G(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a) + \lambda G(b) - \lambda G(a) \end{cases}$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 2t + 1\,dt = \Big[t^2 + t \Big]_2^3 = 9 + 3 - 4 - 2 = 6$
2. $\int_1^2 t^2\,dt = \Big[t^3/3 \Big]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$
3. $\int_{-1}^1 2e^t - 4t^3\,dt = \Big[2e^t - t^4 \Big]_{-1}^1 = 2e^1 - 1 - (2e^{-1} - 1) = 2(e - \frac{1}{e})$
4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t) - \sin(t)\,dt = \Big[2\sin(t) + \cos(t) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) - 2\sin(-\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2}) = 4$
5. $\int_0^1 1 + t^{10}\,dt = \Big[t + \frac{t^{11}}{11} \Big] = 1 + \frac{1}{11} - 0 = \frac{12}{11}$

Exercice 3 (en $F(ct+d)$)
Soient $c, d \in \mathbb{R}$ des constantes fixées, avec $c \neq 0$.
Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si F est telle que $F' = f$ sur $\mathbb{R}$, alors en posant

$$G(t) = F(ct+d) \quad \text{on a} \quad G'(t) = cF'(ct+d) = cf(ct+d) \quad \text{donc} \quad \left(\frac{1}{c}G\right)' = f$$

donc pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(ct+d)\,dt = \left[\frac{1}{c}F(ct+d)\right]_a^b = \frac{1}{c}F(cb+d) - \frac{1}{c}F(ca+d)$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 e^{2t+1}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t+1}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^5 - e^3)$
2. $\displaystyle\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 = -\frac{1}{2\pi}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0$
3. $\displaystyle\int_{-2}^2 e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \left[-2e^{-t/2}\right]_{-2}^2 = -2e^{-1} + 2e^{1} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$
4. (sans développer le carré) $\displaystyle\int_{-1}^1 3(1+2t)^2\,dt = \left[\frac{(1+2t)^3}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{3^3}{2} - \frac{(-1)^3}{2} = 14$
5. $\displaystyle\int_1^3 (1-3t)^3\,dt = \left[\frac{(1-3t)^4}{-12}\right]_1^3 = \frac{(-8)^4}{-12} - \frac{(-2)^4}{-12} = \frac{2^4 - 8^4}{12}$

Exercice 4 (mais qui est la variable ?)
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 t^2 x\,dt = x\int_1^2 t^2\,dt = x\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 t^2 x\,dx = t^2\int_1^2 x\,dx = t^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}t^2$
3. $\displaystyle\int_{T_0}^{T_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_{T_0}^{T_1} = -\tau\left(e^{-T_1/\tau} - e^{-T_0/\tau}\right)$
4. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\omega}\left(\sin\left(\omega\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \sin\left(-\omega\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right)$
5. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\omega x + \varphi)\,d\varphi = \left[-\cos(\omega x + \varphi)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right).$
$= -(-\sin(\omega x)) + \sin(\omega x) = 2\sin(\omega$

(n.b : $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin(a)$ / $\cos(a - \frac{\pi}{2}) = \sin(a)$

Exercice 5 (pour s'entraîner)
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 6t^5\,dt = \left[t^6\right]_0^1 = 1$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^7\,dt = \left[\frac{t^8}{8}\right]_0^1 = 1/8$
3. $\displaystyle\int_{-2}^1 e^{2t} - t\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1 - (e^{-4} - 4)\right) = \frac{e^2 - e^{-4} + 3}{2}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 2\cos(\pi x) + x^2\,dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$
5. $\displaystyle\int_1^2 (1-x)^{10}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{11}}{11}\right]_1^2 = -\frac{(-1)^{11}}{11} = \frac{1}{11}$
6. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{-2s+1}\,ds$

$= \left[\frac{1}{-2}e^{-2s+1}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = -\frac{e}{2}\left(e^{-2\ln(3)} - e^{-2\ln(2)}\right) = -\frac{e}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{5e}{72}$