DS 7 - Corrigé

Exercice 1 :

1) a) $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3,\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{K}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de u_1, u_2 et u_3.

b) • Comme $0u_1+0u_2+0u_3=0_E$, on a $0_E\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

• Soient $u,v\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ alors il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{K}$ tels que $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$, et il existe $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbb{K}$ tels que $v=\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3u_3$.
Dès lors
$$\begin{aligned} u+v &= \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3u_3\\ &=(\lambda_1+\mu_1)u_1+(\lambda_2+\mu_2)u_2+(\lambda_3+\mu_3)u_3\end{aligned}$$
avec $\lambda_1+\mu_1,\ \lambda_2+\mu_2,\ \lambda_3+\mu_3\in\mathbb{K}$. Donc $u+v\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

• Soit $u\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et soit $\lambda\in\mathbb{K}$ alors il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{K}$ tels que $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$ et donc $\lambda u=\lambda\lambda_1u_1+\lambda\lambda_2u_2+\lambda\lambda_3u_3$ avec $\lambda\lambda_1,\lambda\lambda_2,\lambda\lambda_3\in\mathbb{K}$ donc $\lambda u\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

Finalement, $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

2) a) • Comme $2\times0-0+3\times0=0$ on a $(0,0,0)\in F$.

• Soient $u=(x,y,z)\in F$ et $v=(x',y',z')\in F$ alors
$u+v=(x+x',y+y',z+z')$ vérifie :
$$\begin{aligned}2(x+x')-(y+y')+3(z+z') &= 2x-y+3z+2x'-y'+3z'\\ &=0+0 \quad \text{car } u,v\in F\\ &=0 \quad \text{donc } u+v\in F.\end{aligned}$$

• Soit $u=(x,y,z)\in F$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda u=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ vérifie :
$$\begin{aligned}2(\lambda x)-\lambda y+3(\lambda z) &= \lambda(2x-y+3z)\\ &=\lambda\times 0 \quad \text{car } u\in F\\ &=0 \quad \text{donc } \lambda u\in F\end{aligned}$$

Finalement F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a $2x - y + 3z = 0 \iff y = 2x + 3z$.

Ainsi $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$

$= \{(x, 2x+3z, z),\ x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,2,0) + z(0,3,1),\ x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,2,0)$ et $u_2 = (0,3,1)$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2) en est une famille génératrice.

Exercice 2 :

1. La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Et $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

2. f est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 1 - e^{x+1} > 0\}$. On résout donc, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $1 - e^{x+1} > 0 \iff e^{x+1} < 1$

$\iff x + 1 < 0$

$\iff x < -1$

Donc f est défini sur $\boxed{]-\infty, -1[}$.
La fonction $x \mapsto 1 - e^{x+1}$ est continue sur $]-\infty, -1[$ en tant que somme et composée de fonction continues, et elle est - d'après ce qui précède, à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Comme la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction f est donc continue sur $]-\infty, -1[$ par composition.

3. Le mot BLABLA contient 6 lettres dont 2A, 2B et 2L. Pour former une anagramme de ce mot, on choisit :

• 2 emplacements pour les A parmi les 6 emplacements disponibles : il y a $\binom{6}{2}$ possibilités, puis :

• 2 emplacements pour les B parmi les $6-2=4$ emplacements restants : il y a $\binom{4}{2}$ possibilités, puis :

• on place les 2 L dans les $4-2=2$ emplacements restants (il n'y a qu'une seule possibilité).

Ainsi, le nombre d'anagrammes de BLABLA est :

$$\binom{6}{2}\times\binom{4}{2} = \frac{6!}{2!\,4!}\times\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{6!}{2!^3} = \frac{6\times5\times4\times3\times2}{2\times2\times2} = \boxed{90}$$

Exercice 3 :

1)
```
import numpy as np
A = np.array([[2, 5], [4, 1]])
```

2)
```
def diago(A):
    return A[0,1]==0 and A[1,0]==0
```

3) La matrice $D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a\neq 0$ et $b\neq 0$. Dans ce cas $D^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$.

4)
```
def inverse_diag(A):
    if diago(A):
        a = A[0,0]
        b = A[1,1]
        if a!=0 and b!=0:
            B = np.diag([1/a, 1/b])
            return B
    return "A n'est pas diagonale ou pas inversible"
```

Exercice 4 :

1) a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} - x^n \times (-e^{-x})$$
$$= x^{n-1}e^{-x}(x-n)$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}^+$ on a $x^{n-1}e^{-x} \geqslant 0$, il vient, pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$f_n'(x) \geqslant 0 \iff x - n \geqslant 0 \iff x \geqslant n$.

De plus, $f_n(0) = 1 - 0^n e^{-0} = 1$, $f_n(n) = 1 - n^n e^{-n}$,

et par croissances comparées $x^n e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$1-n^ne^{-n}$	$\nearrow$	1

b) On a : $f_n(n) \leqslant 0 \iff 1 - n^n e^{-n} \leqslant 0$

$\iff 1 \leqslant n^n e^{-n}$

$\iff e^n \leqslant n^n$

$\iff e \leqslant n$ car la fonction $x \mapsto x^n$ est

strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $e, n \in \mathbb{R}^+$.

c) Comme $e > 2$, la question précédente fournit que $f_1(1) > 0$ et $f_2(2) > 0$. D'après le tableau de variations de f_n cela implique donc que f_1 et f_2 sont strictement positives sur $\mathbb{R}^+$, ainsi les équations $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$ n'ont pas de solution sur $\mathbb{R}^+$ donc (E_1) et (E_2) n'ont pas de solution sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) On considère la fonction f_n sur chacun des deux intervalles $[0,n]$ et $[n,+\infty[$.

• La fonction f_n est continue sur $[0,n]$, strictement décroissante sur $[0,n]$ et, d'après son tableau de variations, $f_n([0,n]) = [f_n(n), 1]$.
D'après le théorème de la bijection, la fonction

$$g_n : [0,n] \longrightarrow [f_n(n), 1] \quad \text{est donc une bijection.}$$
$$: x \longmapsto f_n(x)$$

Comme $n \geq 3 \geq e$, on a, d'après la question 1.b), $f_n(n) \leq 0$.
Donc $0 \in [f_n(n), 1]$. Ainsi l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x \in [0,n]$ c'est $u_n = g_n^{-1}(0)$.

De plus, on a $g_n(1) = f_n(1) = 1 - 1^n e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \geq 0$ (car $e \geq 1$). Comme g_n est décroissante sur $[0,n]$, g_n^{-1} est décroissante sur $[f_n(n), 1]$ donc sur $[0,1]$. Ainsi $g_n(1) \geq 0$ implique que $g_n^{-1}(g_n(1)) \leq g_n^{-1}(0)$ c'est-à-dire $1 \leq u_n$.

• La fonction f_n est aussi continue sur $[n,+\infty[$, strictement croissante sur $[n,+\infty[$ et, d'après son tableau de variations, $f_n([n,+\infty[) = [f_n(n), 1[$. D'après le théorème de la bijection la fonction

$$h_n : [n,+\infty[\longrightarrow [f_n(n), 1[\quad \text{est donc une bijection.}$$
$$: x \longmapsto f_n(x)$$

Comme précédemment, $0 \in [f_n(n), 1[$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x \in [n,+\infty[$, c'est $v_n = h_n^{-1}(0)$.

Finalement, l'équation $f_n(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation (E_n), admet donc exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}^+$, u_n et v_n vérifiant $1 \leq u_n \leq n \leq v_n$

b) Comme pour tout $n \geq 3$, $v_n \geq n$ et que $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, le théorème de comparaison fournit que $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.}$

c) Pour $n \geq 3$, on a $f_n(u_n) = 0$ donc $1 - u_n^n e^{-u_n} = 0$ donc $u_n^n e^{-u_n} = 1$. Dès lors,

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n^{n+1} e^{-u_n} = 1 - u_n \times u_n^n e^{-u_n} = 1 - u_n \times 1 = 1 - u_n$$

Or $u_n \geq 1$ donc $1 - u_n \leq 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(u_n) \leq 0.}$

Comme $u_n \in [0, n]$, on peut réécrire cette inéquation sous la forme $g_{n+1}(u_n) \leq 0$ où

$$g_{n+1} : [0, n+1] \to [f_{n+1}(n+1), 1]$$
$$: x \mapsto f_{n+1}(x)$$

est, comme vu à la question 2)a), une bijection décroissante.

Ainsi g_{n+1}^{-1} est aussi décroissante sur $[f_{n+1}(n+1), 1]$. L'inégalité $g_{n+1}(u_n) \leq 0$ implique donc que $g_{n+1}^{-1}(g_{n+1}(u_n)) \geq g_{n+1}^{-1}(0)$ c'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1}$. Finalement, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

d) Comme pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 1$, la suite (u_n) est minorée par 1. Elle est aussi décroissante. Donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

e) Pour $n \geq 3$, u_n est solution de l'équation (E_n) donc $u_n^n = e^{u_n}$.

Cela implique que $u_n = (e^{u_n})^{1/n} = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$ on a $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Or $e^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

Donc $\exp\left(\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

f) On a $u_n - 1 = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) - 1$ avec $\frac{u_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ donc $u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n}{n}$.

Par ailleurs, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$ donc $\frac{u_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Finalement $\boxed{u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$.

Exercice 5 :

0) Dans le système complet d'évènements $(E_k, \bar{E_k})$ on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(E_k)\, \mathbb{P}_{E_k}(F_k) + \mathbb{P}(\bar{E_k})\, \mathbb{P}_{\bar{E_k}}(F_k)$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{E_k}(F_k) = \frac{1}{2}$ (si la pièce choisie est équilibrée, il y a une chance sur 2 d'obtenir face), et $\mathbb{P}_{\bar{E_k}}(F_k) = p$ (si la pièce choisie est truquée la probabilité d'obtenir face vaut p).

Comme de plus $\mathbb{P}(\bar{E_k}) = 1 - \mathbb{P}(E_k)$ on obtient finalement :

$\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1}{2} + (1 - \mathbb{P}(E_k)) \times p$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1-2p}{2} + p}$$

1) Au lancer numéro 3 on choisit la pièce au hasard donc $\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{2}$. Ainsi en utilisant la question 0), on a :

$\mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1-2p}{2} + p = \frac{1-2p+4p}{4}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(F_3) = \frac{1+2p}{4}}$

2) a) Si la pièce équilibrée a été choisie au 1^{er} lancer, alors on utilisera cette même pièce au lancer numéro 3 à condition qu'elle ait donné Face. Comme la pièce équilibrée donne Face avec probabilité $\frac{1}{2}$, on a donc $\boxed{\mathbb{P}_{E_1}(E_3) = \frac{1}{2}}$.

Si la pièce truquée a été choisie au 1^{er} lancer, alors on utilisera la pièce équilibrée au 3^e lancer à condition que la pièce truquée ait donné Pile. Comme la pièce truquée a une probabilité $1-p$ de donner Pile, on a donc $\boxed{\mathbb{P}_{\bar{E}_1}(E_3) = 1-p}$.

b) Dans le système complet d'événements $(E_1, \bar{E}_1)$ on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_1)\,\mathbb{P}_{E_1}(E_3) + \mathbb{P}(\bar{E}_1)\,\mathbb{P}_{\bar{E}_1}(E_3).$$

Or le choix de la pièce au 1^{er} lancer se faisant de manière équiprobable on a $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(\bar{E}_1) = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1-p) = \frac{1}{4} + \frac{2-2p}{4}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_3) = \frac{3-2p}{4}}$

c) Ainsi en utilisant la question a) :

$$\mathbb{P}(F_3) = \mathbb{P}(E_3) \times \frac{1-2p}{2} + p = \frac{3-2p}{4} \times \frac{1-2p}{2} + p$$
$$= \frac{3-2p-6p+4p^2+8p}{8}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(F_3) = \frac{4p^2+3}{8}}$

3) a) Dans le système complet d'événements $(E_k, \overline{E_k})$ la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_k)\,\mathbb{P}_{E_k}(E_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{E_k})\,\mathbb{P}_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$$

D'après l'énoncé, si on a choisi la pièce équilibrée au k^e tirage, alors on la garde au $(k+1)$-ème tirage à condition qu'elle ait donné Face, c'est-à-dire avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $\mathbb{P}_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{1}{2}$.

Et si on a choisi la pièce truquée au k^e tirage alors on change de pièce au $(k+1)$-ème tirage à condition qu'elle ait donné Pile, c'est-à-dire avec probabilité $1-p$. Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = 1-p$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{k+1}) &= \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(\overline{E_k}) \times (1-p) \\ &= \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1}{2} + (1 - \mathbb{P}(E_k)) \times (1-p) \\ &= \mathbb{P}(E_k)\left(p - \frac{1}{2}\right) + 1 - p\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_k) \times \frac{2p-1}{2} + 1 - p}$

b) Comme au 1^{er} tirage on choisit la pièce uniformément au hasard on a $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}$. En utilisant la question précédente on obtient donc successivement :

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) \times \frac{2p-1}{2} + 1 - p = \frac{2p-1}{4} + \frac{4-4p}{4} = \frac{3-2p}{4}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_2) \times \frac{2p-1}{2} + 1 - p &= \frac{(3-2p)(2p-1)}{8} + 1 - p \\ &= \frac{6p - 3 - 4p^2 + 2p + 8 - 8p}{8}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_3) = \frac{5-4p^2}{8}}$

c) En utilisant encore la question a) on obtient donc

$$\mathbb{P}(F_3) = \mathbb{P}(E_3) \times \frac{1-2p}{2} + p = \frac{(5-4p^2)(1-2p)}{16} + p$$

$$= \frac{5 - 4p^2 - 10p + 8p^3 + 16p}{16}$$

donc finalement $\boxed{\mathbb{P}(F_3) = \frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16}}$

4) Montrons que la stratégie 3) est meilleure que la 2) qui est meilleure que la 1) c'est-à-dire que

$$\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} \underset{(*_2)}{\geqslant} \frac{4p^2+3}{8} \underset{(*_1)}{\geqslant} \frac{2p+1}{4}$$

On rappelle que $p > \frac{1}{2}$, donc $p \in]\frac{1}{2}, 1]$.

<u>Pour $(*_1)$</u> : On a $\frac{4p^2+3}{8} - \frac{2p+1}{4} = \frac{1}{8}(4p^2+3-4p-2)$

$$= \frac{1}{8}(4p^2 - 4p + 1)$$

$$= \frac{1}{8}(2p-1)^2 \geqslant 0$$

donc $\frac{4p^2+3}{8} \geqslant \frac{2p+1}{4}$.

<u>Pour $(*_2)$</u> : On a $\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} - \frac{4p^2+3}{8} = \frac{1}{16} f(p)$

avec $f(p) = 8p^3 - 4p^2 + 6p + 5 - 8p^2 - 6 = 8p^3 - 12p^2 + 6p - 1$

La fonction f est dérivable sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et : $\forall p \in]\frac{1}{2}, 1]$

$$f'(p) = 24p^2 - 24p + 6 = 6(4p^2 - 4p + 1) = 6(2p-1)^2 \geqslant 0$$

donc f est croissante sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et donc : $\forall p \in]\frac{1}{2}, 1]$,

$f(p) \geqslant f(\frac{1}{2})$. Or $f(\frac{1}{2}) = 8(\frac{1}{2})^3 - 12(\frac{1}{2})^2 + 6(\frac{1}{2}) - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

Donc on a $\frac{1}{16} f(p) \geqslant 0$ et donc $\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} \geqslant \frac{4p^2+3}{8}$