**Exercice 10**

Soient $E = \mathrm{Vect}\Big((-1,2,1,0),\ (-1,2,0,1)\Big)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ y = -2z+t\}$.

1. Montrer que $E$ et $F$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de $F$.
3. Quelle est la dimension de $E$ ?
4. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $E$.
5. Soit $G = E \cap F$. Déterminer une base et la dimension de $G$.

**Exercice 11**

On définit les ensembles suivants :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ -2a-c \\ c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{et}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\ :\ x+y+z+t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E \subset F$.
3. Que vaut $dim(E)$ ?
4. En déduire la dimension de $F$.

**Exercice 12**

Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles $(u_1,u_2)$, $(u_2,u_3)$ et $(u_1,u_3)$ sont libres.
2. La famille $(u_1,u_2,u_3)$ est-elle libre ?
3. Quelle propriété fausse cet exercice met-il en lumière ?

**Exercice 13**

On considère l'ensemble $E$ formé des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$, c'est-à-dire que :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}.$$

1. Sans donner la forme explicite des éléments de $E$, montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. En donnant la forme explicite des éléments de $E$ (voir le cours sur les suites récurrentes linéaires du début d'année), déterminer une famille génératrice de $E$.
3. Montrer que la famille génératrice trouvée à la question précédente est une base de $E$.
4. Exprimer les coordonnées de tout vecteur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dans cette base. On donnera le résultat en fonction de $u_0$ et de $u_1$.

**Exercice 14**

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ où $u_1 = (1,2,2,1),\ u_2 = (5,6,6,5),\ u_3 = (-1,-3,4,0),\ u_4 = (0,4,-3,-1)$.
2. $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ où $u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (2,1,2,1),\ u_3 = (1,-1,1,-1),\ u_4 = (0,1,0,1)$.

**Exercice 15**

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\lambda$ la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ?

1. $(u_1-\lambda e_1, u_2-\lambda e_2, u_3-\lambda e_3)$ où $u_1 = (3,2,-1),\ u_2 = (2,-1,1),\ u_3 = (-4,4,-1)$ et où $(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. $(u_1,u_2,u_3)$ où $u_1 = (\lambda,1,1),\ u_2 = (1,\lambda,-1),\ u_3 = (1,1,\lambda)$.