TD 16 : exo 13

1) E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car :

• Si $(u_n)=(0)$ est la suite nulle alors on a bien $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+2}=0=2\times 0+3\times 0 = 2u_{n+1}+3u_n$

donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\in E$.

• Si $(u_n),(v_n)\in E$ alors la suite $(w_n)=(u_n+v_n)$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$

$$w_{n+2}=u_{n+2}+v_{n+2}\underset{\text{car } (u_n),(v_n)\in E}{=}2u_{n+1}+3u_n+2v_{n+1}+3v_n=2(u_{n+1}+v_{n+1})+3(u_n+v_n)$$
$$=2w_{n+1}+3w_n$$

donc $(w_n)\in E$.

• Si $(u_n)\in E$ et si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors la suite $(v_n)=(\lambda u_n)$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+2}=\lambda u_{n+2}\underset{\text{car } (u_n)\in E}{=}\lambda(2u_{n+1}+3u_n)=2(\lambda u_{n+1})+3(\lambda u_n)=2v_{n+1}+3v_n$$

donc $(v_n)\in E$.

2) Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence $u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$ est $P(X)=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$. Il a pour racines -1 et 3.

Ainsi pour $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a :

$$(u_n)\in E \iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\lambda(-1)^n+\mu 3^n$$
$$\iff (u_n)\in \mathrm{Vect}\left(((-1)^n),(3^n)\right)$$

Ainsi $E=\mathrm{Vect}(a,b)$ avec $a=(a_n)=((-1)^n)$ et $b=(b_n)=(3^n)$.

3) La famille (a,b) est libre car a et b ne sont pas colinéaires. En effet pour $\lambda\in\mathbb{R}$, il n'est pas possible que $b=\lambda a$ car sinon $\forall n\in\mathbb{N}\ 3^n=\lambda(-1)^n$ d'où $1=\lambda\times 1$ (avec $n=0$) et $3=\lambda(-1)$ (avec $n=1$) d'où $\lambda=1=-\frac{1}{3}$: absurde. Et de même pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $a\neq\lambda b$.

Ainsi (a,b) est une base de E et $\dim(E)=2$.

4) Si $(u_n)\in E$ alors il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\lambda(-1)^n+\mu 3^n$

En prenant $n=0$ et $n=1$ on obtient $\begin{cases}u_0=\lambda+\mu\\ u_1=-\lambda+3\mu\end{cases}$ d'où, après calcul, $\begin{cases}\lambda=\dfrac{3u_0-u_1}{4}\\ \mu=\dfrac{u_0+u_1}{4}\end{cases}$ donc les coordonnées de $(u_n)\in E$ dans la base (a,b) sont $\left(\dfrac{3u_0-u_1}{4},\dfrac{u_0+u_1}{4}\right)$.