Expériences aléatoires, probabilités TP13

Exercice 1 Premières simulations

Dans cet exercice, on utilise les fonctions de la bibliothèque `random` *pour simuler des expériences aléatoires. On testera plusieurs fois les fonctions obtenues et on comparera ses résultats avec son voisin.*

Q1 On lance un dé classique. Écrire une fonction `lancer_de` ne prenant rien en argument et renvoyant le résultat du dé.

Q2 On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule verte. Écrire une fonction `tirer` ne prenant rien en argument et simulant le tirage d'une boule dans l'urne. La fonction renverra "`B`", "`R`" ou "`V`" suivant la couleur de la boule tirée.

Q3 On garde la même urne que dans la question précédente. Écrire une fonction `tirer_suc` prenant en argument un entier n et simulant le tirage *successif avec remise* de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

Q4 Toujours avec la même urne, écrire une fonction `tirer_sim` prenant en argument un entier $n \leq 6$ et simulant le tirage *simultané* de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

Q5 Écrire une fonction prenant en argument un réel $p \in [0,1]$ et renvoyant `"bonjour"` avec probabilité p et `"au revoir"` avec probabilité $1-p$. Tester votre fonction (plusieurs fois) avec $p = 0,9$ et avec $p = 0,1$.

Q6 Écrire une fonction `jour` ne prenant rien en argument et renvoyant `"lundi"` avec probabilité $0,2$, `"mardi"` avec probabilité $0,7$ et `"mercredi"` avec probabilité $0,1$.

Exercice 2 Premières estimations

On reprend la fonction `lancer_de` écrite à l'exercice précédent.

Q1 On lance le dé N fois de suite, et on compte le nombre de fois, noté X, où on obtient 6. Écrire une fonction `repete_de` prenant en entrée un entier N et renvoyant la valeur X.

Q2 En déduire une fonction `fréquence` prenant en argument l'entier N et renvoyant la fréquence d'apparition du résultat 6, c'est-à-dire la quantité $\dfrac{X}{N}$.

Q3 Pour N grand, quelle doit être intuitivement la valeur de cette fréquence ? Vérifier avec l'ordinateur.

Q4 Tracer l'évolution de la fréquence d'apparition du 6 en fonction de N. Visualiser sur le graphique le résultat de la question précédente.

Dans les questions ci-dessous on reprend cette technique pour estimer d'autres probabilités.

Q5 On reprend la fonction `jour` écrite à l'exercice précédent. Écrire un code Python permettant de vérifier que cette fonction renvoie bien `"lundi"` avec probabilité $0,2$.

Q6 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire d au hasard sans remise et on note Y le nombre de numéros pairs tirés. Écrire une fonction `nb_pair` prenant en arguments n et d et simulant le résultat Y de cette expérience. *On pourra commencer par créer une liste correspondant au contenu de l'urne.*

Q7 Estimer à l'aide de Python la probabilité que $Y = 0$. On vérifiera que cette probabilité est proche de 0.222 dans le cas $n = 10$ et $d = 2$.

Exercice 3 Chaîne de Markov

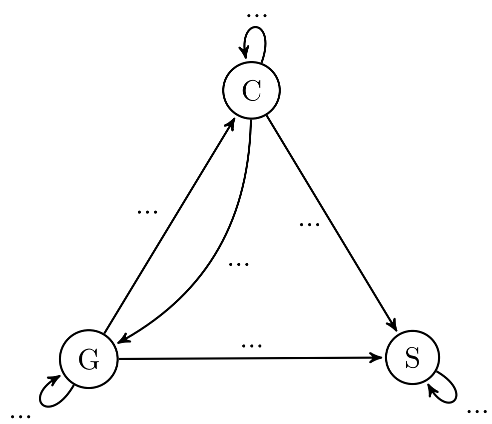
Une maison de campagne comporte 3 pièces : une chambre (notée C), un garage (noté G) et un séjour (noté S). À l'instant $t = 0$, une souris se trouve dans le garage. Chaque minute, elle peut se déplacer avec les probabilités suivantes :

— si elle se trouve dans le séjour, elle y reste avec probabilité 1 ;

— si elle est dans une autre pièce, elle y reste avec probabilité $\frac{1}{2}$, et elle passe dans une autre pièce avec probabilité $\frac{1}{4}$ pour chaque pièce.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note c_n, g_n et s_n les probabilités que la souris soit, respectivement, dans la chambre, le garage ou le séjour au bout de n minutes.

Q1 Compléter le diagramme ci-contre en indiquant sur chaque flèche la probabilité de passer d'une pièce à une autre.



Q2 Écrire une fonction `souris` renvoyant la position (sous la forme "G", "C" ou "S") de la souris au bout de n minutes. *Attention, ici on ne vous demande pas d'estimer des probabilités...*

Q3 En utilisant la fonction `souris`, écrire une fonction `proba` prenant en entrée le nombre de minutes n ainsi qu'un nombre d'essais N et renvoyant une approximation des probabilités g_n, c_n et s_n. On vérifiera que (g_6, c_6, s_6) vaut environ `(0.089, 0.089, 0.822)`.

Q4 On a vu dans le cours de probabilités que les suites $(g_n), (c_n)$ et (s_n) sont en fait données par des relations de récurrence qu'on obtient via la formule des probabilités totales. Donner sans démontrer ces relations.

Q5 En déduire une fonction `proba_exacte` calculant g_n, c_n et s_n et vérifiez le résultat de la fonction `proba`. Commentez le résultat obtenu à la question 3.

Exercice 4 Une marche aléatoire 1D

Q1 Écrire une fonction `pas` renvoyant 1 avec probabilité 0.15, 2 avec probabilité 0.25, et 3 avec probabilité 0.6.

Q2 Un pion initialement situé à l'origine d'un axe gradué de 1 en 1 se déplace selon la règle suivante : à chaque temps $n \in \mathbb{N}$, il se déplace d'un nombre aléatoire d'unités vers la droite. Ce nombre est égal à 1 dans 15% des cas, à 2 dans 25% des cas, et à 3 dans 60% des cas. Écrire une fonction renvoyant la position du pion après 10 déplacements.

Q3 Estimer la probabilité que le pion soit à la position 25 après 10 coups.

Q4 En moyenne, à quelle position est le pion après 10 coups ?

Exercice 5 Matrices inversibles

Q1 Compléter le rappel de mathématiques suivant :

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et A est inversible si et seulement si $\det(A)$ ....

Q2 Écrire une fonction prenant en argument une matrice carrée de taille 2 et décidant si elle est inversible. Testez votre fonction.

Q3 Écrire une fonction créant une matrice de taille 2 dont les coefficients sont choisis uniformément au hasard dans $[0, 1]$.

Q4 Estimer la probabilité qu'une telle matrice aléatoire soit inversible. Le résultat trouvé signifie-t-il que toutes les matrices sont inversibles ?

Exercice 6 Une marche aléatoire 2D

Il est minuit, John le propriétaire d'un bar pousse dehors le dernier client, un habitué, et ferme la porte à clef derrière lui. Depuis 10 ans qu'il le chasse tous les jours, John a vu cet ivrogne prendre toutes les directions possibles à la sortie du pub. Il l'a même déjà vu repasser devant le bar plus tard... Alors qu'il commence à passer le balai, les yeux de John se posent sur le tabouret où était installé l'ivrogne une dizaine de minutes plus tôt et à son pied, il aperçoit une sacoche oubliée par son fidèle client. John quittera son bar définitivement pour ce soir dans 10 minutes, et il estime que l'ivrogne aura fait au maximum 500 pas (tous d'un mètre environ) pendant cet intervalle de temps. Il se demande si pendant les 10 minutes, l'ivrogne a des chances de repasser devant son bar, auquel cas il pourrait lui rendre sa sacoche ce soir...

Q1 Écrire une fonction `position` prenant en argument le nombre de pas `nb_pas` et retournant un couple de listes `(x,y)` contenant les positions successives de l'ivrogne. On respectera le cahier des charges suivant :

— À chaque pas, l'ivrogne peut, de manière équiprobable, avancer, reculer, aller à droite ou aller à gauche.

— Le bar se trouve à la position (0,0).

— La liste `x` contient toutes les valeurs d'abscisses et `y` toutes les valeurs d'ordonnées.

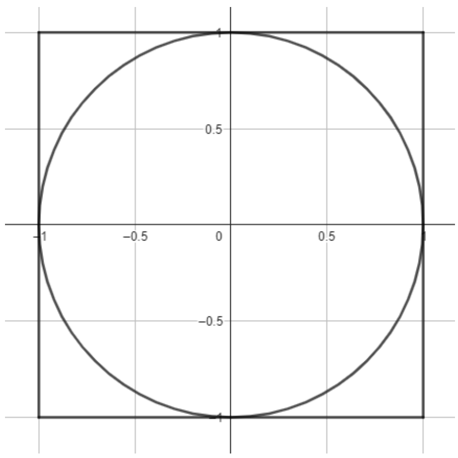
Q2 Écrire une fonction `trajet` permettant de tracer `N` trajets différents sur un même graphique. Tester la fonction avec `nb_pas = 500` et `N = 1` puis avec `N=2`, `N=3`, `N = 100`. Que remarque-t-on ?

Q3 Écrire une fonction `retour` prenant en argument le nombre de pas et renvoyant le temps `T` après lequel l'ivrogne revient au bar pour la première fois (et `T=nb_pas` s'il n'y revient pas en le nombre de pas pris en argument). Tester votre fonction avec un petit nombre de pas.

Q4 Après combien de temps en moyenne, John pourra-t-il rendre sa sacoche à son client ?

Exercice 7 Fléchettes

On considère un carré $\mathcal{C}$ de côté 2 contenant un disque $\mathcal{D}$ de rayon 1, tous les deux centrés en l'origine comme sur la figure ci-dessous. On place un point $M(x,y)$ au hasard dans le carré $\mathcal{C}$, et on s'intéresse à la probabilité que M appartienne au dique $\mathcal{D}$.



Q1 Quelle est l'aire de $\mathcal{D}$?

Q2 Quelle est la probabilité que M appartienne à $\mathcal{D}$?

Q3 En déduire un code Python permettant d'obtenir une approximation de π.