FC 17

exo 4 (page 7)

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $(P')^2 = 4P$ alors $\deg((P')^2) = \deg(4P)$ donc $2\deg(P') = \deg(P)$. On distingue alors 2 cas :

- soit P est constant (on traitera ce cas dans la synthèse)
- soit $\deg(P) \geq 1$ et alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ donc

$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$ donc $\deg(P) = 2$

Synthèse : Cherchons quels sont les polynômes constants et de degré 2 vérifiant $(P')^2 = 4P$.

- si $P = a_0 \in \mathbb{R}[X]$ est constant alors $(P')^2 = 4P \Leftrightarrow 0 = 4a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$

le polynôme nul est donc solution

- si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}[X]$ est de degré 2 alors $a_2 \neq 0$ et

$$
\begin{aligned}
(P')^2 = 4P &\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2 X)^2 = 4(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) \\
&\Leftrightarrow a_1^2 + 4a_1 a_2 X + 4a_2^2 X^2 = 4a_0 + 4a_1 X + 4a_2 X^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 4a_0 \\ 4a_1 a_2 = 4a_1 \\ 4a_2^2 = 4a_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1^2/4 \\ a_1 a_2 = a_1 \\ a_2^2 = a_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1^2/4 \\ a_2 = 1 \quad (\text{car } a_2 \neq 0) \\ a_1 = a_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (a_0 = a_1^2/4 \text{ et } a_2 = 1)
\end{aligned}
$$

Donc les polynômes $\frac{a_1^2}{4} + a_1 X + X^2$ sont solutions.

Conclusion : Finalement, les polynômes solution sont le polynôme nul et les $\frac{a_1^2}{4} + a_1 X + X^2$ pour $a_1 \in \mathbb{R}$.

FC 17

exo 7.2 (page 10)

a) On procède par récurrence. Pour $n=0$ c'est clair, et si $P(n) = P(0)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors $P(n+1) = P(n)$ (car $P(X+1) = P(X)$) donc $P(n+1) = P(0)$ ce qu'il fallait démontrer.

b) Le polynôme Q vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = P(n) - P(0) = 0$ donc Q a une infinité de racines donc $Q = 0$.

c) D'après b) on a donc $P(X) - P(0) = 0$ donc $P(X) = P(0)$ donc P est un polynôme constant.

Les questions précédentes constituent une partie "analyse" montrant que si P est solution alors P est constant. Reste à procéder à la "synthèse" en constatant que si P est constant alors il vérifie bien $P(X+1) = P(X)$.

En conclusion, les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(X+1) = P(X)$ sont les polynômes constants.