Exercice 1
Un dé cubique est truqué de sorte que la probabilité p_k d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k. On note λ le coefficient de proportionnalité. On lance ce dé et on note X le résultat.

1. Déterminer λ.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2
On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note X la somme des résultats des 2 dés.

1. Quel espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ est approprié à l'expérience ?
2. Présenter les résultats des dés dans un tableau et en déduire la loi de X.
3. Combien vaut $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 3
On propose le jeu suivant : pour pouvoir jouer il faut d'abord verser 1 euro, puis on jète deux dés équilibrés à 6 faces et :

- si l'un au moins des deux dés donne un chiffre impair, on ne gagne rien ;
- si les dés donnent deux résultats pairs différents, on gagne s euros où $s \in \mathbb{R}_*^+$;
- si les dés donnent le même résultat et que ce résultat est pair, on gagne une somme égale au total des deux dés en euros.

On note X le gain à la fin du jeu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour quelles valeurs de s est-il dans votre avantage de jouer ?

Exercice 4
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$.

1. Donner la loi de X sous forme d'un tableau en utilisant la formule du cours. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
2. En utilisant la loi de X, déterminer la loi de $(X-2)^2$. En déduire $\mathbb{E}((X-2)^2)$.
3. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}((X-2)^2)$ par le théorème de transfert.

Exercice 5
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

1. En utilisant le théorème de transfert, déterminer la valeur de $\mathbb{E}(2^X)$.
2. Déterminer de même la valeur de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ *(cf calcul de $\mathbb{E}(X)$ fait en cours.)*

Exercice 6

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Calculer $V(X)$.
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ où $a < b$ sont deux entiers. En utilisant la question 1, déterminer $V(Y)$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \alpha \frac{k}{n}$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer α pour que cela définisse bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8
Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de X (et **préciser les valeurs des paramètres**) :

1. Une ligne de train fait circuler en temps normal un train toutes les heures entre 8h00 et 17h59. Un jour de grève, chaque train a une probabilité 1/3 de circuler. X est le nombre de trains qui auront circulé dans la journée.
2. X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([\![0, 9]\!])$ et $X = 10\,X_1 + X_2$.
3. X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi $b(1/3)$ et $X = X_1 \times X_2$.
4. Dans un jeu, on avance son pion sur des cases numérotées de 0 à 30. Le pion est initialement sur la case 0 et à chaque tour on avance d'une case si on répond correctement à une question. On suppose que la probabilité de répondre correctement à chacune des questions est 1/4, et on joue pendant 30 tours. X est le numéro de la case sur laquelle le pion est à la fin du jeu.
5. Une galette des rois est découpée en 10 parts égales. Dix personnes choisissent successivement et au hasard une part. X est le nombre de parts qu'il restait dans l'assiette quand le convive qui a eu la fève s'est servi.

Exercice 9
Un QCM est composé de n questions indépendantes proposant chacune 4 réponses dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte 3 points et une mauvaise réponse fait perdre 1 point.

1. Un premier candidat répond au hasard à toutes les questions. On note X son nombre de bonnes réponses, et S sa note.
   (a) Quelle est la loi de X ? Précisez $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Exprimer S en fonction de X. En déduire le score moyen de ce premier candidat.
   (c) Calculer la loi de $\widetilde{X} = n - X$ en utilisant celle de X. Interprétez ce résultat.
2. Un deuxième candidat, mieux préparé, a pour chaque question une probabilité $p \in [0, 1]$ de connaître la bonne réponse. S'il ne connaît pas la réponse, il répond au hasard. On note Y son nombre de bonnes réponses et T sa note.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) En déduire le score moyen de ce deuxième candidat.

Exercice 10
Une entreprise souhaite recruter un employé, n candidats se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et **le premier qui réussit le test est engagé**. On suppose que tous les candidats ont la même probabilité $p \in]0,1[$ de réussir le test.
On note R_k l'évènement : "le k-ème candidat réussit le test". On définit enfin la variable aléatoire X suivante, à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$:

- pour $k \in [\![1, n]\!]$, $X = k$ lorsque le k-ème candidat est celui qui est engagé ;
- $X = n+1$ lorsque personne n'a réussi le test.

1. (a) Exprimer l'évènement $(X = n+1)$ en fonction des évènements $R_1,\ R_2, \ldots, R_n$ et en déduire que la probabilité de retenir un candidat est $1-(1-p)^n$.
   (b) Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de retenir un candidat ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ d'une part, ainsi que pour $k = n+1$ d'autre part, exprimer l'évènement $(X = k)$ en fonction des évènements $R_1,\ R_2, \ldots, R_n$.
3. Déterminer la loi de X. On vérifiera que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
4. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. En calculant de deux manières la dérivée de f, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}$ pour tout $x \neq 1$.
5. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 11
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 3 boules dans l'urne. On note $X_1,\ X_2,\ X_3$ les numéros obtenus, ainsi que Y le maximum des numéros obtenus, et Z le minimum des numéros obtenus.

1. Que valent $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$?
2. (a) Pour tout $k \in Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(Y \leq k)$.
   (b) En déduire la loi de Y.
3. En appliquant une méthode similaire, déterminer la loi de Z.

Exercice 12
1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, 20]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} P(X \geq k) = E(X)$.

Lors d'un DS, n candidats n'ont pas soigné la présentation de leurs copies. Plutôt que de lire de tels brouillons, le correcteur décide de noter indépendamment et au hasard chaque copie par une note entière entre 0 et 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

2. Déterminer la fonction de répartition de X_n et en déduire la loi de X_n.
3. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = 20 - \displaystyle\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{21}\right)^n$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Commenter.

Exercice 13
Dans une fête foraine, on mise $m/2$ euros pour jouer au jeu suivant :

- on tire une boule dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9. Si c'est le 9, on gagne 18 fois notre mise (i.e. $9\,m$ euros) et le jeu est fini.
- Si on tire une autre boule que le 9, alors on pioche une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes classique. On gagne alors 1 euro si on tire n'importe quel cœur ou le roi de pique, et on repart avec 0 euro si on tire une autre carte.

On note X la variable aléatoire égale à la somme remportée pendant le jeu, et Y celle égale à notre gain au total, c'est-à-dire que $Y = X - \frac{m}{2}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{4}$. En déduire ensuite la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ en fonction de m.
3. Sans plus de calculs, en déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$.
4. Pour quelles valeurs de m le jeu est-il à notre avantage ?
5. Je n'aime pas prendre des risques. Je souhaite donc jouer uniquement si $V(Y) \leq \dfrac{1}{4}$. Quelles valeurs de m puis-je miser ? Quelle valeur me conseillez-vous de miser ?

Exercice 14
Dans un jeu TV, il faut marquer un but pour remporter le jackpot. On suppose que la probabilité de réussir un tir est p, et que les tirs sont indépendants.

1. On suppose qu'on dispose de k essais. On gagne si on marque au moins un but en k essais. Quelle est la probabilité de gagner le jackpot ?
2. On suppose maintenant que le nombre d'essais dont on dispose pour tenter de remporter le jackpot est déterminé dans une première phase du jeu. Lors de cette première phase, une roue est divisée en n secteurs de même aire numérotés de 1 à n ; on fait tourner la roue, et le nombre X sur lequel elle s'arrête est le nombre d'essais dont on dispose.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Déterminer la probabilité de gagner le jackpot.

Exercice 15
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages successifs d'une boule de cette urne, et à chaque tirage on replace la boule dans l'urne en y ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que celle tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note X_n le nombre de boules blanches tirées au total au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Quelles sont les valeurs prises par X_n ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme.

Exercice 16

Un standardiste appelle n personnes au téléphone. Les appels sont indépendants, et chaque personne a une probabilité p de répondre. On note X le nombre de personnes que le standardiste a réussi à joindre lors de sa première série d'appels. Le standardiste rappelle ensuite les $n - X$ personnes qu'il n'a pas réussi à joindre. À nouveau les appels sont indépendants et chaque personne a une probabilité p de répondre. On note Y le nombre de personnes qu'il a réussi à joindre lors de la deuxième série d'appels uniquement.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(Y = k|X = i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
4. En déduire que le nombre total de personnes jointes $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
5. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 17

1. Soit X une variable aléatoire réelle finie et telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, et soit $a > 0$. Démontrer l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$
2. Soit X une variable aléatoire réelle finie quelconque, et soit $a > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$
On pourra remarquer que $|x - m| \geq a \iff (x - m)^2 \geq a^2$.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
4. Si on lance un dé équilibré n fois, la fréquence d'apparition du chiffre 3 (i.e. le nombre de 3 obtenus divisé par le nombre total de lancers n) est proche de $\frac{1}{6}$. Donner une condition sur n pour pouvoir affirmer avec une fiabilité de 95% que cette fréquence est comprise entre $\frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{100}$.