Mathématiques - mercredi 15 mai 2024
Devoir nº8 Durée : 1 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.**

Exercice 1. On considère les ensembles :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z + t = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \{(2a, -a, 0, a) \ , \ a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$

Exercice 2. Soient $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quel est le vecteur v dont les coordonnées dans cette base sont $(1, -2, -1)$?
3. Quelles sont les coordonnées de $w = (3, -1, 0)$ dans cette base ?

Exercice 3. Factoriser complètement le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2.$$

Exercice 4. Dans le plan, on considère les points $A(0, -1)$ et $B(2, 1)$.

1. Placer A et B sur un schéma.
2. Calculer la distance AB.
3. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (AB).
4. Déterminer les points M du plan tels que $AM = BM$.
5. À quel objet géométrique appartiennent les points M de la question précédente ? Le dessiner sur le schéma.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle qu'on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'ensemble

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ : \ P'(1) = P(2)\}.$$

1. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite de l'exercice on considère $n = 2$. On note $P_1(X) = X - 1$, $P_2(X) = X^2 - 2$ et $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$.

2. Montrer que $F \subset E_2$.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Sans plus de calculs, en déduire la dimension de E_2.
5. *Question bonus.* Déterminer la dimension de E_n.
   On pourra (mais d'autres méthodes sont possibles) déterminer pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ et $c_k \in \mathbb{R}$ le polynôme $P_k(X) = X^k - c_k$ appartient à E_n.