DS 8 - Corrigé

exercice 1

1) • Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ on a $x+y+z+t=0 \iff x=-y-z-t$. Ainsi

$$F = \{(-y-z-t, y, z, t),\ y,z,t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{y(-1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(-1,0,0,1),\ y,z,t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \text{ avec } u_1=(-1,1,0,0),\ u_2=(-1,0,1,0),\ u_3=(-1,0,0,1)$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

• On a $G = \{a(2,-1,0,1),\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u_4)$ avec $u_4 = (2,-1,0,1)$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2) D'après 1) la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de F.

De plus, pour $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$,

si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0,0)$ alors $\begin{cases} -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc (u_1,u_2,u_3) est une famille libre.

Ainsi (u_1,u_2,u_3) est une base de F et $\dim(F)=3$.

3) D'après 1) la famille (u_4) est une famille génératrice de G.

Comme de plus $u_4 \neq (0,0,0,0)$ cette famille est libre.

Donc (u_4) est une base de G et $\dim(G)=1$.

4) Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ on a :

$$(x,y,z,t) \in F \cap G \iff (x,y,z,t) \in F \text{ et } (x,y,z,t) \in G$$
$$\iff x+y+z+t=0 \text{ et } \exists a \in \mathbb{R} : (x,y,z,t) = (2a,-a,0,a)$$
$$\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} x=2a \\ y=-a \\ z=0 \\ t=a \end{cases} \text{ et } 2a-a+0+a=0$$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 2a \\ y = -a \\ z = 0 \\ t = a \end{cases}$ et $a = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (0,0,0,0)$

Ainsi $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

exercice 2 :

1) On a $rg(u_1,u_2,u_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1)$

donc $rg(u_1,u_2,u_3) = 3$ donc (u_1,u_2,u_3) est libre.

Comme cette famille comporte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, (u_1,u_2,u_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Il s'agit de $v = 1u_1 - 2u_2 - 1u_3$
$= (1,0,1) - (0,2,2) - (1,1,1)$
$= (0,-3,-2)$

3) Pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ on résout :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = w \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \lambda_3 = 3 - 2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 - \lambda_2 = -1 + 3 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

Donc les coordonnées de w dans la base (u_1,u_2,u_3) sont $(1,-3,2)$.

exercice 3 :

On remarque que $P(1) = 1-2-1+4-2 = 0$. De plus, $P'(X) = 4X^3 - 6X^2 - 2X + 4$ donc $P'(1) = 4-6-2+4 = 0$.
Ainsi 1 est racine multiple de P donc P est divisible par $(X-1)^2$ donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$.
Dès lors, $\deg(P(X)) = \deg((X-1)^2) + \deg(Q(X))$
donc $\deg(Q(X)) = \deg(P(X)) - 2 = 4-2 = 2$.
Ainsi on cherche Q sous la forme $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On a alors :

$$P(X) = (X-1)^2 Q(X) \iff X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2 = (X^2 - 2X + 1)(aX^2 + bX + c)$$

$$\iff X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2 = \begin{pmatrix} aX^4 - 2aX^3 + aX^2 \\ + bX^3 - 2bX^2 + bX \\ + cX^2 - 2cX + c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ a - 2b + c = -1 \\ b - 2c = 4 \\ c = -2 \end{cases}$$

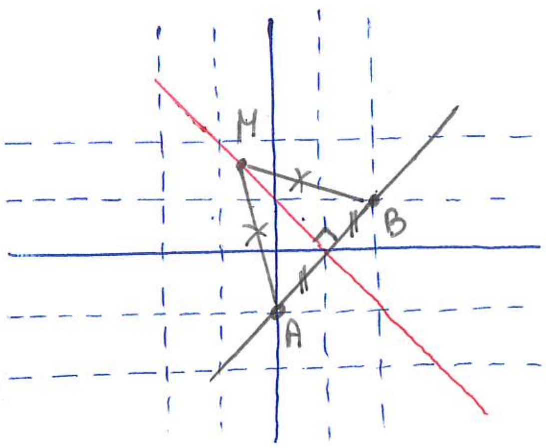
$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + 2a = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$ (correct car $a - 2b + c = 1 - 0 - 2 = -1$ et $b - 2c = 0 + 4 = 4$)

donc $Q(X) = X^2 - 2$, et finalement :

$$P(X) = (X-1)^2(X^2-2) = (X-1)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}).$$

exercice 4 :

1)



2) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3) Le vecteur $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), et celle-ci passe par $A(0,-1)$.

Pour $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a donc

$$M \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R} : \vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{AB} \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ainsi $\left(\begin{cases} x = 2t \\ y = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\right)$ est une équation paramétrique de (AB).

Par ailleurs, pour $x, y, t \in \mathbb{R}$ on a $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -1+x \end{cases}$

Donc une équation cartésienne de (AB) est $y = -1+x$

4) Pour $M(x,y)$ un point du plan on a

$$AM = \|\vec{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-1) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

et $BM = \|\vec{BM}\| = \left\| \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } AM = BM &\iff \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \\ &\iff x^2+y^2+2y+1 = x^2-4x+4+y^2-2y+1 \\ &\iff 4y = -4x+4 \\ &\iff y = -x+1 \end{aligned}$$

Les points M du plan tels que $AM = BM$ sont donc les $(x, -x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5) Il s'agit de la droite d'équation cartésienne $y = -x+1$. C'est la médiatrice du segment [AB].

exercice 5 :

1) Si $P=0$ est le polynôme nul, alors $P'(1)=0=P(2)$ donc $0\in E_n$.
Soient $P, Q \in E_n$ alors on a $P'(1)=P(2)$ et $Q'(1)=Q(2)$, donc
$$(P+Q)'(1) = P'(1)+Q'(1) = P(2)+Q(2) = (P+Q)(2)$$
donc $P+Q\in E_n$.
Soient $P\in E_n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors on a $P'(1)=P(2)$ donc
$$(\lambda P)'(1) = \lambda P'(1) = \lambda P(2) = (\lambda P)(2)$$
donc $\lambda P\in E_n$.
Ainsi E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Comme E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, pour montrer que $\mathrm{Vect}(P_1,P_2)\subset E_2$ il suffit de montrer que $P_1, P_2\in E_2$.
Or $P_1'(X)=1$ donc $P_1'(1)=1$ et $P_1(2)=2-1=1$ donc $P_1'(1)=P_1(2)$
donc $P_1\in E_2$.
De même $P_2'(X)=2X$ donc $P_2'(1)=2$ et $P_2(2)=2^2-2=2$ donc
$P_2'(1)=P_2(2)$ donc $P_2\in E_2$.
Ainsi $F\subset E_2$.

3) Par définition, (P_1,P_2) est une famille génératrice de F. De plus, $P_1\neq 0$ et pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda P_1 = \lambda X-\lambda \neq X^2-2 = P_2$ car $\lambda X-\lambda$ est de degré strictement inférieur à 2. Ainsi P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires. Donc (P_1,P_2) est libre. Finalement, (P_1,P_2) est une base de F et donc $\dim(F)=2$.

4) On a $F\subset E_2\subset\mathbb{R}_2[X]$ donc $\dim(F)\leqslant\dim(E_2)\leqslant\dim(\mathbb{R}_2[X])$
donc $2\leqslant\dim(E_2)\leqslant 3$. Ainsi $\dim(E_2)$ vaut 2 ou 3.
Si $\dim(E_2)=3$ on aurait $E_2\subset\mathbb{R}_2[X]$ et $\dim(E_2)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$
donc $E_2=\mathbb{R}_2[X]$. Or il existe des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ n'appar-

tenant pas à E_2 : par exemple les polynômes constants non nuls.
Il est donc impossible que $\dim(E_2)=3$ et c'est donc que $\dim(E_2)=2$.

5) Pour $k\in[\![1,n]\!]$ et $c_k\in\mathbb{R}$, le polynôme $P_k(X)=X^k-c_k$ vérifie
$P_k'(X)=kX^{k-1}$ donc $P_k'(1)=k$ et $P_k(2)=2^k-c_k$.
Ainsi $P_k\in E_n \iff k=2^k-c_k \iff c_k=2^k-k$.
On dispose donc d'une famille $(P_1,P_2,\dots,P_n)$ de polynômes donnés par : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P_k(X)=X^k-2^k+k$, tels que
$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P_k\in E_n$.
De plus cette famille est libre. En effet, pour $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,
si $\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\dots+\lambda_nP_n=0$ alors $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X^k-2^k+k)=0$
donc, en identifiant le coefficient devant X^k, $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$.

Comme $(P_1,\dots,P_n)$ est une famille libre de E_n comportant n vecteurs,
on doit avoir $\dim(E_n)\geqslant n$. Or $E_n\subset\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(E_n)\leqslant n+1$.
On a donc $\dim(E_n)=n$ ou $\dim(E_n)=n+1$.

Comme précédemment, si $\dim(E_n)=n+1$ on aurait $E_n=\mathbb{R}_n[X]$ ce qui n'est pas vrai car les polynômes constants non nuls n'appartiennent pas à E_n. C'est donc finalement que $\dim(E_n)=n$.