

Continuons à “lire à l’envers” le tableau donné dans la feuille de cours sur les dérivées usuelles.

$f : t \mapsto \dots$	$F : t \mapsto \dots$	sur $\mathcal{D} = \dots$	car
t^α avec α			
t^3 $\frac{1}{t^3}$ $\frac{1}{t^2}$			
$\frac{1}{t}$		\mathbb{R}_*^+	
$\frac{1}{t}$		\mathbb{R}_*^-	
$\frac{1}{1+t^2}$			

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^e t^3 - \frac{1}{t} dt$$

$$2. \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt$$

$$3. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^4} dt$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t} dt$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{1}{t+4} dt$$

$$2. \int_1^2 \frac{1}{4t+1} dt$$

$$3. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2t-1} dt$$

$$4. \int_1^4 \frac{1}{(2t+1)^4} dt$$

$$5. \int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt$$

Exercice 3

Un exercice classique consiste à déterminer une intégrale du type $\int_a^b \frac{1}{P(x)} dx$ où P est un polynôme. Pour cela, il s'agit de réussir à écrire la quantité $\frac{1}{P(x)}$ sous une forme plus simple¹.

Dans cet exercice, on veut calculer l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{8}{x^2+2x-3} dx$.

1. Quelles sont les racines α et β du polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 3$?
2. Déterminer deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \frac{8}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}$$

3. En déduire la valeur de I .

Exercice 4

1. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}, \frac{1}{x^2+x-6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

(b) En déduire $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x-6} dx$.

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{2x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2(2x^2+3)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{2x^2+3}.$$

(b) En déduire $\int_{\sqrt{3/2}}^{3/\sqrt{2}} \frac{2x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2(2x^2+3)} dx$.

1. On parle de *décomposition en éléments simples*.

Pour s'entraîner, voici un extrait du cahier de calcul (les numéros des exercices vous permettent de consulter les corrigés, disponibles sur cahier de prépa).

Calcul 15.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$

b) $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt$

Calcul 15.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt$

b) $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt$

Calcul 15.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \mapsto t^2 - 3t + 2$?

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$

c) Calculer $\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)} dt$

Calcul 15.6

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2-4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3} dt$

b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2-t} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1} dt$

Calcul 15.7

Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^a \frac{1}{t^2-a} dt$