TD 20 :

exo 4 :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Pour $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $f_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$
- $f_a(\lambda x) = a \times \lambda x = \lambda \times ax = \lambda f_a(x)$

Donc $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = f_a$.

Pour cela, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque f est linéaire

on a : $f(x) = f(x \times 1) = x f(1) = ax$ avec $a = f(1)$

Ceci montre bien que $f \in \{f_a, a \in \mathbb{R}\}$

En conclusion : $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f_a, a \in \mathbb{R}\}$.

exo 5 :

1) Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (x+x' + y+y' - (z+z'), x+x' - (y+y') + z+z') \\ &= (x+y-z, x-y, z) + (x'+y'-z', x'-y'+z') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y - \lambda z, \lambda x - \lambda y + \lambda z) \\ &= \lambda (x+y-z, x-y+z) = \lambda f(u) \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$: pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, y, y), y \in \mathbb{R}\}$

2) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $\phi(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = \phi(P) + \phi(Q)$
- $\phi(\lambda P) = (\lambda P)' = \lambda P' = \lambda \phi(P)$

Donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Déterminons $\mathrm{Ker}(\phi)$:

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{P \in \mathbb{R}[X] : P' = 0\} = \{a,\ a \in \mathbb{R}\}$ ($\mathrm{Ker}(\phi)$ est l'ensemble des polynômes constants)

3) (plus dur, peut être laissé de côté dans un 1er temps)

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi((u_n) + \lambda(v_n)) = \psi((u_n + \lambda v_n)) = (u_{n+1} + \lambda v_{n+1} - 2(u_n + \lambda v_n))$$
$$= (u_{n+1} - 2u_n) + \lambda(v_{n+1} - 2v_n)$$
$$= \psi((u_n)) + \lambda \psi((v_n))$$

(Notez que, tout au long de ces égalités, il s'agit toujours de suites et non des nombres $u_{n+1} - 2u_n$ ...)

Donc $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Déterminons $\mathrm{Ker}(\psi)$: pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a :

$$(u_n) \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff (u_{n+1} - 2u_n) = 0 \text{ (la suite nulle)}$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 0$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times 2^n$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(\psi)$ est l'ensemble des suites géométriques de raison 2 :

$\mathrm{Ker}(\psi) = \{(a \times 2^n),\ a \in \mathbb{R}\}$.

TD 20

exo 9 :

1) à savoir faire

2) On peut calculer $rg(f)$ et constater que $rg(f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cela implique donc que f est bijective.
Mais comme on nous demande aussi d'expliciter f^{-1}, autant faire le calcul directement :
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on résout, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x+2y-2z = a \\ -x+3y = b \\ -2y+z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-2z = a \\ 5y-2z = a+b & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -2y+z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-2z = a \\ -y+\frac{z}{2} = \frac{c}{2} & (L_2 \leftrightarrow L_3 \text{ puis } L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2) \\ 5y-2z = a+b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-2z = a \\ -y+\frac{z}{2} = \frac{c}{2} \\ \frac{1}{2}z = a+b+\frac{5c}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = a+2z-2y = 3a+2b+6c \\ y = \frac{z}{2} - \frac{c}{2} = a+b+2c \\ z = 2a+2b+5c \end{cases}$$

Comme on trouve une unique solution, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est bijective,
et $f^{-1}(a,b,c) = (3a+2b+6c,\ a+b+2c,\ 2a+2b+5c)$

(n.b : on peut vérifier le résultat en calculant :

$$f(f^{-1}(a,b,c)) = f(3a+2b+6c,\ a+b+2c,\ 2a+2b+5c)$$
$$= (3a+2b+6c+2(a+b+2c)-2(2a+2b+5c),\ -(3a+2b+6c)+3(a+b+2c),\ -2(a+b+2c)+2a+2b+5c)$$
$$= (a,b,c) \quad \ddot\smile \;)$$

3) à savoir faire.