Exercice 11
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (5x-2y+z, 7x-3y+2z, 2x-2y+2z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,-1),\ u_2 = (0,1,2)$ et $u_3 = (-1,-2,0)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.
2. Déterminer les matrices A, B et C suivantes :
   - $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
   - $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$
   - $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 12
Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Combien valent n et p ?
2. Déterminer l'expression de $g(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. (i.e. une expression similaire à celle donnée pour f dans l'exercice précédent).
3. Soient $u_1 = (1,-1)$, $u_2 = (1,1)$, $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,-1,-1)$ et $v_3 = (1,1,1)$. Justifer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ forment des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 13
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+4y+2z, 3y-2z, 4y+3z).$$

Soient $u_1 = (1,-1,1),\ u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u_2, u_3, u_1)$.

Exercice 14
Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g).$$

Exercice 15
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Soient aussi $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, -2)$.

1. Déterminer l'expression de $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice $\Delta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
5. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
6. Vérifier que $A = P\Delta P^{-1}$.
7. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire l'expression de $f^n(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $Im(f)$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$.
4. En déduire que $f^2 = 0$.
5. Sans calculer le produit matriciel, que vaut alors M^n pour $n \geq 2$?

Exercice 17
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Déterminer l'expression de $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. f est-elle bijective ? Si oui, donner l'expression de $f^{-1}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On s'appuiera sur un résultat du cours.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $B_\lambda = A - \lambda I_2$.

3. Démontrer que B_λ est inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.
4. Soient $u = (2, 1)$ et $v = (-1, 2)$. Montrer que $u \in \mathrm{Ker}(B_1)$ et $v \in \mathrm{Ker}(B_{-1})$.
5. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Déterminer la matrice de f dans cette base.
7. Représenter les vecteurs u, v, $f(u)$ et $f(v)$ dans le plan. En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.

Exercice 18
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$ et soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$.

1. Démontrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans cette base.