Corrigé du Concours blanc – Mathématiques

Avril 2024

Corrigé de l'exercice 1.

1. En prenant $n=0$, on a : $u_1 = 5u_0 - 0 + 6$ donc $\boxed{u_1 = 6}$

   En prenant $n=1$, on a : $u_2 = 5u_1 - 8 + 6$ donc $\boxed{u_2 = 28}$

2. (a)

```python
def suite_u(n):
    u = 0
    for i in range(1, n+1):
        u = 5*u - 8*(i-1) + 6
    return u
```

   (b) *(La réponse dépend du programme précédent)*

   Il y a n tours de boucles et à chaque tour on effectue 5 opérations donc

$$\boxed{c(n) = 5n}$$

   (c)

```python
Lx = [ n for n in range(1, 101)]
Ly = [ suite_u(n) for n in range(1, 101)]
plt.plot(Lx, Ly,"k+")
plt.show()
```

3. (a) • Pour $n=0$, $u_0 = 0$ et $2\times 0 = 0$ donc $u_0 \geqslant 2\times 0$.

   • Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 2n$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 8n + 6 \\ &\geqslant 5\times(2n) - 8n + 6 \qquad \textit{car } u_n \geqslant 2n \\ &\geqslant 2n+6 \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad u_{n+1} \geqslant 2(n+1)$$

   En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant 2n}$$

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$ et $\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ donc *(Théorème de comparaison)*

$$\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$

   (c) i. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc *(définition)* $\forall A\in\mathbb{R}, \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$

   ce qui entraine en particulier :

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_0 \text{ tel que, pour tout entier } n \text{ vérifiant, } n\geqslant n_0,\ \text{on a : } u_n \geqslant 10^p}$$

   ii.

```python
def seuil_10(p):
    u = 0
    n = 0
    N = 10**p
    while u < N:
        u = 5*u - 8*n + 6
        n += 1
    return n
```

4. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & 4u_n - 8n + 6 \\ & = & 4(u_n - 2n) + 6 \\ & \geqslant & 6 \qquad \textit{(car } u_n \geqslant 2n \textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

5. (a)

```python
def suite_S(n):
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s += suite_u(k)
    return s
```

(b) k va de 0 à n et à chaque tour il y a $c(k) = 5k$ opérations donc au total on fait $\sum_{k=0}^{n} 5k$.

$$\boxed{\text{La fonction } \texttt{suite\_S} \text{ effectue } \frac{5n(n+1)}{2} \text{ opérations}}$$

(c)

```python
def suite_S_bis(n):
    u = 0
    S = u
    for i in range(n):
        u = 5*u - 8*i + 6
        S = S + u
    return S
```

Remarque : Le nombre d'opérations effectuées ici est $5n$ *qui est négligeable devant* $\frac{5n(n+1)}{2}$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

6. (a) Conjecture : Il semble que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 5v_n$.

Démontrons le :

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 2(n+1) + 1 \\ & = & 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 \\ & = & 5u_n - 10n + 5 \\ & = & 5(u_n - 2n + 1) \\ & = & 5v_n \end{array}$$

on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 5v_n}$$

(b) Dans la question précédente on montre que (v_n) est géométrique de raison 5 et on sait que $v_0 = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 5^n$$

or $v_n = u_n - 2n + 1$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5^n + 2n - 1}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (5^k + 2k - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 5^k + \sum_{k=0}^{n} (2k-1) \\
&= \frac{1-5^{n+1}}{1-5} + (n+1) \cdot \frac{-1+(2n-1)}{2} \qquad \textit{(formules du cours)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \tfrac{1}{4}\left(5^{n+1}-1\right) + n^2 - 1}$$

Corrigé de l'exercice 2.

Partie I : Calcul matriciel

1. On calcule que :

$$PP^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3$$

et, de même, $P^T P = I_3$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = P^T$.

2. On calcule successivement que :

$$P^{-1}M = P^T M = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -14 & 7 & 7 \\ 0 & -3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

puis

$$D = P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -14 & 7 & 7 \\ 0 & -3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

donc finalement $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On a $D = P^{-1}MP$ donc $PD = MP$ donc $M = PDP^{-1}$.

4. Comme D est une matrice diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

5. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
Tout d'abord pour $n = 0$, on a d'une part $M^0 = I_3$ et d'autre part $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc la formule est vraie au rang $n = 0$.
Supposons ensuite que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme $M = PDP^{-1}$ on en déduit que :

$$M^{n+1} = M^n M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Partie II : Entraînement au triathlon

1. Comme l'athlète commence par la natation, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$. D'après l'énoncé, cela implique aussi que $a_1 = 0,8$, $b_1 = 0,1$ et $c_1 = 0,1$.

2. L'énoncé demande en fait de calculer la probabilité de l'évènement $D = A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3$. D'après la formule des probabilités composées on a :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(C_1) \times \mathbb{P}_{A_0 \cap C_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{A_0 \cap C_1 \cap B_2}(A_3).$$

De plus, la probabilité de pratiquer une activité le jour n est uniquement influencée par l'activité pratiquée le jour $n-1$. Ainsi, on a en fait

$$\mathbb{P}_{A_0 \cap C_1}(B_2) = \mathbb{P}_{C_1}(B_2) = 0,3 \ \text{ et } \ \mathbb{P}_{A_0 \cap C_1 \cap B_2}(A_3) = \mathbb{P}_{B_2}(A_3) = 0,1$$

et, on a $\mathbb{P}(A_0) = a_0 = 1$ et $\mathbb{P}_{A_0}(C_1) = 0,1$. Finalement, la probabilité recherchée est $\mathbb{P}(D) = 1 \times 0,1 \times 0,3 \times 0,1 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{125} = 0,008$.

3. L'énoncé demande en fait de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{B_2}(A_1)$. D'après la formule de Bayes, on a $\mathbb{P}_{B_2}(A_1) = \mathbb{P}_{A_1}(B_2) \times \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_2)}$. De plus, d'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements (A_1, B_1, C_1) on a :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(B_2).$$

L'énoncé donne : $\mathbb{P}_{A_1}(B_2) = 0,1$, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = 0,6$ et $\mathbb{P}_{C_1}(B_2) = 0,3$, et comme dit plus haut : $\mathbb{P}(A_1) = a_1 = 0,8$, $\mathbb{P}(B_1) = b_1 = 0,1$ et $\mathbb{P}(C_1) = c_1 = 0,1$.
Finalement la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_2}(A_1) &= \frac{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B_2)}{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(B_2)} \\ &= \frac{0,8 \times 0,1}{0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,6 + 0,1 \times 0,3} = \frac{8}{8+6+3} = \frac{8}{17}.\end{aligned}$$

4. Dans le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) on a :

$$\begin{aligned}a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times a_n + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times b_n + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times b_n.\end{aligned}$$

Or l'énoncé donne $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8 = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0,1 = \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0,1 = \frac{1}{10}$. On obtient donc finalement

$$a_{n+1} = \frac{4}{5} a_n + \frac{1}{10} b_n + \frac{1}{10} c_n.$$

De la même manière on obtient :

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= 0,1 a_n + 0,6 b_n + 0,3 c_n = \frac{1}{10} a_n + \frac{3}{5} b_n + \frac{3}{10} c_n \\ c_{n+1} &= 0,1 a_n + 0,3 b_n + 0,6 c_n = \frac{1}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n + \frac{3}{5} c_n.\end{aligned}$$

5.
```python
def Probas(n):
    a,b,c = 1,0,0
    for k in range(n):
        new_a = 4*a/5 + b/10 + c/10
        new_b = a/10 + 3*b/5 + 3*c/10
        new_c = a/10 + 3*b/10 + 3*c/5
        a,b,c = new_a,new_b,new_c
    return [a,b,c]
```

6. Posons $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}&\frac{3}{10}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$AX_n=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}&\frac{3}{10}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}a_n+\frac{1}{10}b_n+\frac{1}{10}c_n\\\frac{1}{10}a_n+\frac{3}{10}b_n+\frac{3}{5}c_n\\\frac{1}{10}a_n+\frac{3}{10}b_n+\frac{3}{5}c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}.$$

   On remarque de plus que $A=\dfrac{1}{10}M$.

7. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $X_n=A^nX_0$.
   Tout d'abord $A^0X_0=I_3X_0=X_0$ donc la formule est vraie au rang $n=0$.
   Supposons ensuite que $X_n=A^nX_0$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ alors $X_{n+1}=AX_n=AA^nX_0=A^{n+1}X_0$ ce qu'il fallait démontrer.

   Dès lors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $X_n=A^nX_0=\left(\dfrac{1}{10}M\right)^nX_0=\dfrac{1}{10^n}M^nX_0$ et en utilisant les questions 4 et 5 de la partie I il vient

$$X_n=\frac{1}{10^n}PD^nP^{-1}X_0=\frac{1}{10^n}P\begin{pmatrix}10^n&0&0\\0&7^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}X_0.$$

   Pour conclure, on a vu à la question 1 de la partie II que $X_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On calcule donc finalement que :

$$\begin{aligned}X_n&=\frac{1}{10^n}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10^n&0&0\\0&7^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\-2&1&1\\0&-\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{7}{10}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{3}{10}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\-2&1&1\\0&-\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{7}{10}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{3}{10}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\times\left(\frac{7}{10}\right)^n\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2+4\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\\2-2\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\\2-2\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   donc $a_n=\dfrac{1}{3}+2\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^n$ et $b_n=c_n=\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

8. Comme $-1<\frac{7}{10}<1$ on a $\left(\frac{7}{10}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{1}{3}$.
   On peut interpréter ces limites par le fait qu'en temps long, l'athlète n'a plus de sport privilégié, il pratique les trois sports de manière équiprobable.

9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\left|a_n-\frac{1}{3}\right|=2\times\left(\frac{7}{10}\right)^n\quad\text{et}\quad\left|b_n-\frac{1}{3}\right|=\left|c_n-\frac{1}{3}\right|=\left(\frac{7}{10}\right)^n\leq2\times\left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

   Ainsi en prenant $K=2$ on a bien l'estimation souhaitée.

Partie III : Généralisation

1. On calcule que $AX_\infty = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi on a bien $AX_\infty = X_\infty$.
2. Par linéarité du produit matriciel on a pour $n \in \mathbb{N}$: $A(X_n - X_\infty) = AX_n - AX_\infty = X_{n+1} - X_\infty$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in E$. On a donc $a+b+c=0$. Calculons alors :

$$P^T X = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}(a+b+c)\\ -2a+b+c \\ \sqrt{3}(-b+c)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\ -2a+b+c \\ \sqrt{3}(-b+c)\end{pmatrix}.$$

   Donc $P^T X \in F$.
4. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n - X_\infty = \begin{pmatrix} a_n - \frac{1}{3} \\ b_n - \frac{1}{3} \\ c_n - \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Or $a_n = \mathbb{P}(A_n),\ b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ avec (A_n, B_n, C_n) formant un système complet d'évènements. On a donc $a_n + b_n + c_n = 1$ et par suite $(a_n - \frac{1}{3}) + (b_n - \frac{1}{3}) + (c_n - \frac{1}{3}) = 1 - 1 = 0$. Ainsi $X_n - X_\infty \in E$ et donc $P^T(X_n - X_\infty) \in F$ d'après la question précédente.
5. Notons $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors on calcule que :

$$PX = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} x\sqrt{2} - 2y \\ x\sqrt{2} + y - z\sqrt{3} \\ x\sqrt{2} + y + z\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} ||PX||_2 &= \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{2}-2y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}+y-z\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}+y+z\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}\left((x\sqrt{2}-2y)^2 + (x\sqrt{2}+y-z\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{2}+y+z\sqrt{3})^2\right)} \end{aligned}$$

   On développe alors les carrés grâce à l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} &(x\sqrt{2}-2y)^2 = 2x^2 - 4\sqrt{2}xy + 4y^2 \\ &(x\sqrt{2}+y-z\sqrt{3})^2 = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2(\sqrt{2}xy - \sqrt{2}\sqrt{3}xz - \sqrt{3}yz) \\ &(x\sqrt{2}+y+z\sqrt{3})^2 = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2(\sqrt{2}xy + \sqrt{2}\sqrt{3}xz + \sqrt{3}yz) \end{aligned}$$

   En sommant ces trois expressions, les termes en xy, xz et zy se simplifient de sorte que :

$$||PX||_2 = \sqrt{\frac{1}{6}\left(6x^2 + 6y^2 + 6z^2\right)} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = ||X||_2$$

   ce qu'il fallait démontrer.
6. Pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la question précédente appliquée à $P^T X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donne $||PP^T X||_2 = ||P^T X||_2$. Or $P^T = P^{-1}$ donc $PP^T X = X$, et ainsi $||X||_2 = ||P^T X||_2$.
7. Soit $X = \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} \in F$ alors on a

$$\frac{1}{10}DX = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{10}a \\ \frac{3}{10}b\end{pmatrix}$$

donc

$$\left\|\frac{1}{10}DX\right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{7}{10}a\right)^2 + \left(\frac{3}{10}b\right)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{7}{10}a\right)^2 + \left(\frac{7}{10}b\right)^2} = \frac{7}{10}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Or $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0^2+a^2+b^2} = ||X||_2$. On a donc bien $\left\|\frac{1}{10}DX\right\|_2 \leq ||X||_2$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a, d'après la question 2 de la partie III et la question 3 de la partie I :

$$X_{n+1} - X_\infty = A(X_n - X_\infty) = \frac{1}{10}M(X_n - X_\infty) = \frac{1}{10}PDP^{-1}(X_n - X_\infty) = P\frac{1}{10}DP^T(X_n - X_\infty).$$

Dès lors, d'après la question 5 de la partie III :

$$||X_{n+1} - X_\infty||_2 = ||P \times \frac{1}{10}DP^T(X_n - X_\infty)||_2 = ||\frac{1}{10}DP^T(X_n - X_\infty)||_2.$$

Or d'après la question 4 de la partie III on a $P^T(X_n - X_\infty) \in F$ donc, d'après la question 7 de la partie III :

$$||\frac{1}{10}DP^T(X_n - X_\infty)||_2 \leq \frac{7}{10}||P^T(X_n - X_\infty)||_2.$$

Enfin, d'après la question 6 de la partie III :

$$||P^T(X_n - X_\infty)||_2 = ||X_n - X_\infty||_2.$$

Finalement, on a donc $||X_{n+1} - X_\infty||_2 \leq \frac{7}{10}||X_n - X_\infty||_2$.

Montrons par récurrence que cela implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||X_n - X_\infty||_2 \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2.$$

Tout d'abord, comme $\left(\frac{7}{10}\right)^0 = 1$, l'inégalité est vraie au rang $n = 0$.

Supposons ensuite que $||X_n - X_\infty||_2 \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors $||X_{n+1} - X_\infty||_2 \leq \frac{7}{10} \times ||X_n - X_\infty||_2 \leq \frac{7}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2 \leq \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} ||X_0 - X_\infty||_2$ ce qu'il fallait démontrer.

9. On a en fait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_n - X_\infty||_2 = \sqrt{(a_n - \frac{1}{3})^2 + (b_n - \frac{1}{3})^2 + (c_n - \frac{1}{3})^2}$.
En remarquant que $(a_n - \frac{1}{3})^2 + (b_n - \frac{1}{3})^2 + (c_n - \frac{1}{3})^2 \geq (a_n - \frac{1}{3})^2$ on en déduit que

$$||X_n - X_\infty||_2 \geq \sqrt{(a_n - \frac{1}{3})^2} = \left|a_n - \frac{1}{3}\right|.$$

L'estimation de la question précédente fournit donc en particulier que :

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2.$$

De même on a

$$\left|b_n - \frac{1}{3}\right| \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2 \ \text{ et } \ \left|c_n - \frac{1}{3}\right| \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2.$$

Finalement, on retrouve bien l'estimation de la question 9 de la partie II en prenant $K = ||X_0 - X_\infty||_2$. Par ailleurs, comme $\left(\frac{7}{10}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - \frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n - \frac{1}{3} = 0$ c'est-à-dire que (a_n), (b_n) et (c_n) convergent encore vers $\frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. (a) Soit $m \in \mathbb{R}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$G_m(G_{1/m}(x)) = \left(x^{1/m}\right)^m = x \quad \text{et} \quad G_{1/m}(G_m(x)) = \left(x^m\right)^{1/m} = x$$

ce qui prouve que $G_m \circ G_{1/m} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^\star}$ et $G_{1/m} \circ G_m = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^\star}$ et donc que $\boxed{G_m \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+^\star.}$

Remarque. On peut aussi raisonner en utilisant le théorème de la bijection continue.

(b) La question précédente montre que $\boxed{\text{lorsque } m \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G_m^{-1}(x) = G_{1/m}(x) = x^{1/m}.}$

(c) • Si $m < 0$, alors G_m est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x^m - 1$	||	$+$	0	$-$	

• Si $m > 0$, alors G_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x^m - 1$	||	$-$	0	$+$	

(bien sur dans ce cas G_m est prolongeable par continuité en 0.)

2. La dérivée f_a' de f_a est donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f_a'(x) = a x^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1).}$$

En vertu de la question précédente

• Si $a < 1$, alors $a - 1 < 0$ et on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f_a'(x)$	||	$+$	0	$-$	

• Si $a > 1$, alors $a - 1 > 0$ et on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	

3. On suppose que $0 < a < 1$.

(a) D'après le tableau de signe de f_a' établi à la question précédente, le tableau de variations de f_a est

x	0		1		$+\infty$
$f_a(x)$	1	$\nearrow$	$2 - a$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, on a $f(0)=1$, $f(1)=2-a$ et comme $0<a<1$, $f_a(x)=x(x^{a-1}-a)+1 \underset{x\to\infty}{\to} -\infty$.
Ainsi f_a est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc
$\boxed{\text{le maximum de } f_a \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ est } f_a(1)=2-a.}$

(b) f_a est strictement positive sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, f_a est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. En vertu du théorème de la bijection continue, f_a réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $f_a([1,+\infty[)=]-\infty,2-a]$.
Or, comme $a<1$, on déduit que $2-a>1>0$, ce qui prouve que $0\in]-\infty,2-a]$.
Ainsi, 0 possède un unique antécédent réel $u(a)$ par la fonction f_a. $\boxed{f_a \text{ s'annule en unique réel } u(a).}$

(c) Le discriminant de $P(X)=\frac{1}{2}X^2-X-1$ vaut 3. Ainsi $\boxed{P \text{ possède deux racines réelles, } 1-\sqrt{3} \text{ et } 1+\sqrt{3}.}$
Par définition, $u(1/2)$ est l'unique réel en lequel la fonction $f_{1/2}$ s'annule.
Soit $x\in\mathbb{R}_+^\star$. Alors $f_{1/2}(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{2}x+1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x}^2)-\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow P(\sqrt{x})=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}$ est racine de P.
Or $\sqrt{x}>0$ et la seule racine strictement positive de P est $1+\sqrt{3}$. Finalement on a établi que $f_{1/2}(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$ (la dernière équivalence en est bien une car x et $1+\sqrt{3}>0$).
En conclusion, $\boxed{u(1/2)=4+2\sqrt{3}.}$

(d) Par définition de $u(a)$, $f_a(u(a))=0$ autrement dit

$$u(a)^a-au(a)+1=0$$

soit encore

$$au(a)=u(a)^a+1. \tag{$\star$}$$

Or on sait que $u(a)>1$ (en reprenant les variations de f_a), donc on en déduit que $u(a)^a>1^a=1$ (par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^a$ sur $\mathbb{R}_+^\star$). De plus $a<1$, donc $u(a)^a>1>a$. En injectant dans $(\star)$ on obtient que $au(a)>a+1$ soit que

$$\boxed{u(a)>1+\frac{1}{a}.}$$

4. On sait que

$$\forall a\in]0,1[,\quad u(a)>1+\frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \lim_{a\to0^+} 1+\frac{1}{a}=+\infty.$$

Par le théorème de comparaison pour les fonctions réelles, on déduit que

$$\boxed{\lim_{a\to0^+} u(a)=+\infty.}$$

5. On suppose que $1<a$.

(a) On reprend le tableau de signes de f_a' dans le cas $1<a$ établi question 2. Le tableau de variations de f_a est alors

x	0		1		$+\infty$
$f_a(x)$	1	$\searrow$	$2-a$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, on a $f(0)=1$, $f(1)=2-a$ et comme $1<a$, $f_a(x)=x^a(1-ax^{1-a})+1 \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$.
Ainsi f_a est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc
$\boxed{\text{le minimum de } f_a \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ est } f_a(1)=2-a.}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\boxed{\text{L'unique zéro de } f_2 \text{ est } u(2) = 1.}$

(c) Supposons que $a > 2$.

f_a est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ (respectivement strictement croissante sur $[1,+\infty[$), donc par le théorème de la bijection continue, f_a est bijective de $[0,1]$ dans $[2-a,1]$ (respectivement de $[1,+\infty[$ dans $[2-a,+\infty[$).

Or $f_a(1) = 2-a < 0$ donc f possède un unique zéro dans l'intervalle $[0,1]$, noté $u(a)$ et un unique zéro dans l'intervalle $[1,+\infty[$, noté $v(a)$.

Par ailleurs $f_a(0) = 1 \neq 0$ et $f_a(1) = 2-a \neq 0$.

En conclusion, $\boxed{f_a \text{ possède exactement deux zéros : } u(a) \text{ tel que } 0 < u(a) < 1 \text{ et } v(a) \text{ tel que } 1 < v(a).}$

6. On suppose que $a \geqslant 2$.

(a) On sait que $0 < u(a) < 1$ puis par stricte croissance de $x \mapsto x^a$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 < u(a)^a < 1$.

Or $u(a)^a - au(a) + 1 = 0$, autrement dit $u(a)^a = au(a) - 1$.

Finalement on a bien que $\boxed{0 \leqslant au(a) - 1 \leqslant 1.}$

(b) On en déduit que

$$\frac{1}{a} \leqslant u(a) \leqslant \frac{2}{a}$$

puis par théorème d'encadrement que

$$\boxed{\lim_{a\to\infty} u(a) = 0.}$$

(c) Comme $\lim_{a\to\infty} u(a) = 0$, on a que

$$\boxed{\lim_{a\to\infty} u(a)^a = 0}$$

(par exemple en écrivant que $u(a)^a = \exp(a\ln(u(a)))$.)

(d) On sait que $u(a)^a = au(a) - 1$ et que $\lim_{a\to\infty} u(a)^a = 0$. On en déduit que $\lim_{a\to\infty} au(a) - 1 = 0$ soit encore que $\lim_{a\to\infty} au(a) = 1$, ce qui signifie par définition que $\boxed{\text{lorsque } a \to +\infty,\ u(a) \sim \frac{1}{a}.}$

7. (a) On a vu que lorsque $a \geqslant 2$, on a $\frac{1}{a} \leqslant u(a) \leqslant \frac{2}{a}$. Donc $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 2,\ u_k = u(k) \geqslant \frac{1}{k}.}$

(b) Soit φ la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \ln(1+t) \end{array}.$$

Montrons que φ est positive sur $\mathbb{R}_+$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0.$$

Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(0) = 0$.

Finalement

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad t \geqslant \ln(1+t).}$$

(c) Soit $k \geqslant 2$. On déduit de la question précédente que

$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Or comme $u_k \geqslant \frac{1}{k}$, on en conclut que

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2, \quad u_k \geqslant \ln(k+1) - \ln(k).}$$

(d) Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'inégalité précédente pour $k \in [\![2, n]\!]$, il vient que

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(2)$$

la dernière somme étant télescopique.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \quad S_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(2).}$$

(e) Comme

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) - \ln(2) = +\infty \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad S_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(2),$$

on conclut par théorème de comparaison que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.}$$

(f) Soit $k \geqslant 2$. On a vu que pour $a \geqslant 2$, $0 \leqslant u(a) \leqslant \frac{2}{a}$, donc $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{2}{k}$ puis par croissance de la fonction $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_k^k \leqslant \left(\frac{2}{k}\right)^k.}$$

(g) Soit $k \geqslant 3$. On a $\frac{2}{k} \leqslant \frac{2}{3}$ puis, à nouveau par croissance croissance de la fonction $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$, $\left(\frac{2}{k}\right)^k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
Finalement

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad 0 \leqslant u_k^k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k.} \qquad (\star\star)$$

(h) Soit $n \geqslant 3$. En vertu de la relation de Chasles :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} u_k^k = u_2^2 + \sum_{k=3}^{n} u_k^k.$$

En sommant l'inégalité $(\star\star)$ pour $k \in [\![3, n]\!]$, on obtient

$$T_n \leqslant u_2^2 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = u_2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1 - \frac{2}{3}}$$

en identifiant une somme géométrique de raison $2/3$. Comme $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \leqslant 1$, on conclut que

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad T_n \leqslant u_2^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3.}$$

(i) Comme pour tout $k \geqslant 2$, $u_k^k \geqslant 0$, $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\geqslant 2} \text{ est croissante}}$:
en effet pour $n \geqslant 2$, $T_{n+1} - T_n = u_{n+1}^{n+1} \geqslant 0$.
De plus, la question précédente montre que la suite (T_n) est majorée.
Par le théorème de convergence monotone, on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (T_n) \text{ est convergente.}}$