Feuille de cours 21 : dérivation

2 Calculs de dérivées

On reprend les techniques vues dans le chapitre 6 (*cf* feuille de cours 6.1 : calculs de dérivées).

2.1 Dérivées des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, on rappelle son ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'_f$ et l'expression de sa dérivée f' :

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}'_f$	$f'(x)$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n\ x^{n-1}$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n\ x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$			
$\sqrt{x}$			
$\ln x$	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$a^x \ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Attention à l'écriture :

2.2 Opérations algébriques

Proposition 1
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
(1) $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
(3) $f\,g$ est dérivable sur I et $\boxed{(f\,g)' = f'\,g + f\,g'}$.
(4) Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}}.$$

Démonstration :

- Les points (1) et (2) ne posent pas de problème (règles usuelles sur les limites).

Exemple 1 $\boxed{\text{Toute fonction polynômiale est dérivable sur } \mathbb{R}}$

Soit $P : x \longmapsto a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$.
Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = a_1 + 2a_2\, x + \ldots + na_n\, x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$$

Remarque 2
On peut dériver terme à terme une somme de fonctions dérivables : si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en x_0 alors $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0)}$

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$. En calculant la dérivée de f de deux manières différentes, déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Exercice 2
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^\pi}{\ln x}$
2. $g : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \cos(k)\, x^k$

2.3 Dérivée d'une composée

Proposition 3
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est dérivable sur I, g est dérivable sur J, et que $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = \quad\quad\quad\quad}$

Démonstation :
Soit $x_0 \in I$, notons $y_0 = f(x_0) \in J$, et introduisons la fonction

$$\tau : y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{si } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2

1. Avec $g = \cos$ et $f = \exp$, la fonction $g \circ f : x \longmapsto \cos(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = e^x \cos'(e^x) = -e^x \sin(e^x)$.
2. De même, la fonction $f \circ g : x \longmapsto e^{\cos(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

Exemple 3 On retrouve alors les formules usuelles pour les dérivées de composées :
si u est dérivable alors par exemple

1. e^u est dérivable et $(e^u)' =$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est dérivable et $(u^n)' =$
3. $\sqrt{u}$ est dérivable en tout point où $u > 0$ et $(\sqrt{u})' =$

Exercice 3

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \longmapsto \ln(x)^3$
   (b) $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\tan(e^x)}$
2. Si u est une fonction dérivable calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $v = \sin(u^2)$
   (b) $w = \sqrt{1 + u^2}$
   (c) $y = \ln(\ln(u))$

2.4 Dérivée de la bijection réciproque

Proposition 4
Soit $f : I \longrightarrow J$ une application bijective. On suppose que f est dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$, et soit $y_0 = f(x_0)$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{i.e.}$$

Démonstration :
Comme f est dérivable elle est continue, on a alors admis que f^{-1} était aussi continue. Ainsi $f^{-1}(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f^{-1}(y_0) = x_0$. Comme de plus $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ on a par composition de limites, pour $y \neq y_0$ (donc $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$ puisque f est bijective) :

$$\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$$

Par passage à l'inverse, on peut alors dire que :

- si $f'(x_0) = 0$, alors
- si $f'(x_0) \neq 0$ alors

Remarque 5
On retrouve la formule de la dérivée de f^{-1} en dérivant l'identité $(f \circ f^{-1})(x) = x$ qui donne

Exemple 4
La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ est bijective et sa dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque $\ln : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et : $\forall y > 0$,

Remarque 6
Graphiquement, la condition $f'(x_0) \neq 0$ de la proposition se comprend bien. Rappelons que les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Ainsi, lorsque $f'(x_0) = 0$, le graphe de f admet une tangente horizontale en x_0, donc le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en $y_0 = f(x_0)$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.
Par exemple, la fonction carrée a une dérivée nulle en 0, et la fonction racine n'est pas dérivable en 0.

Un dernier exemple important concerne la fonction **arctangente**.
Rappelons que :

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque[1] de $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$.

- arctan est continue et strictement croissante[2] sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$.
- arctan est impaire[3].

- ses valeurs usuelles sont[4] :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Ajoutons pour finir, sa fonction dérivée :

Proposition 7
La fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) =$$

Démonstration :

1. La fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et est π-périodique ; on l'étudie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$, tan est strictement croissante sur I, de plus d'après les limites de cos et sin en $\pm\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$ et $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} \tan = -\infty$, ainsi $\tan : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective.
2. D'après le théorème de la bijection.
3. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, considérons $x = \arctan(-y) \in]-\pi/2, \pi/2[$; on a $\tan(x) = -y$ et tan est impaire donc $\tan(-x) = y$ donc $\arctan(y) = -x = -\arctan(-y)$.
4. Cela découle des valeurs usuelles de tan.

Exercice 4
Soit $f : x \longmapsto \arctan(e^{-x})$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$ et déterminer $(f^{-1})'(\dfrac{\pi}{4})$.

Exercice 5
Soit $g : x \longmapsto (x-1)^3 + 4$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $[0,3]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que g^{-1} est dérivable en 5 et calculer $(g^{-1})'(5)$.
3. Montrer que g^{-1} n'est pas dérivable en 4.

3 Dérivées d'ordre supérieur, régularité

3.1 Dérivée n-ème

Définition 8
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est également dérivable sur I. Dans ce cas, on note $f^{(2)} = (f')'$ la dérivée de f', appelée dérivée seconde de f.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est dérivable n fois sur I lorsqu'on peut la dériver successivement n fois, et on définit sa dérivée n-ème, notée $f^{(n)}$ par récurrence par :

- $f^{(0)} = f$, et
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarque 9
Une autre notation pour $f^{(n)}$ est $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple 5

1. La fonction exp est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto x^m$ est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

En effet, pour $n = 0$, cette formule donne bien $f^{(0)} = f$; et si cette formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

- si $n \leq m - 1$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ avec $m - n \geq 1$ donc
- si $n = m$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)} = \dfrac{m!}{0!}x^0 = m!$ donc $f^{(n+1)}(x) = 0$;
- si $n > m$ alors $f^{(n)} = 0$ donc $f^{(n+1)} = 0$.

ce qui montre que la formule est bien vraie au rang $n + 1$.

Remarque 10
Souvent pour déterminer l'expression de la dérivée n-ème d'une fonction, on intuite une formule en calculant les premières dérivées, puis on la démontre par récurrence.

Exercice 6
Déterminer la dérivée n-ème des fonctions cos et $f : x \longmapsto e^{2x}$

Proposition 11
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g sont dérivables n fois, alors :

1. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois, et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$,
2. fg est dérivable n fois,
3. si $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable n fois,
4. si g ne s'annule pas alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable n fois.

Démonstration :

1. Cela découle de la linéarité de la dérivation (et d'une récurrence).
2. Pour $n = 1$, le résultat est vrai puisqu'on a $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f et g sont deux fois dérivables alors on peut aussi écrire que
$$(fg)^{(2)} = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f^{(2)}g + f'g' + f'g' + fg^{(2)} = f^{(2)}g + 2f'g' + fg^{(2)}$$
On en déduit donc que si f et g sont 3 fois dérivables alors fg l'est aussi et que $(fg)^{(3)}$ s'exprime en fonction de $f, f', f^{(2)}, f^{(3)}$ et de $g, g', g^{(2)}, g^{(3)}$. Une récurrence permettrait de formaliser ce raisonnement [5].
3. Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ aussi, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons f et g dérivables $n+1$ fois. Alors, g', f' et f sont dérivables n fois, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est dérivable n fois, donc d'après 2. le produit $f' \times (g' \circ f)$ est dérivable n fois. Ainsi $(g \circ f)'$ est dérivable n fois, donc $g \circ f$ est dérivable $n + 1$ fois.
4. On applique 3. avec la fonction inverse pour obtenir que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable n fois, puis on applique le résultat 2. sur le produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

Remarque 12
Les résultats de la proposition 16 restent vrais en remplaçant “dérivable n fois” par “de classe $\mathcal{C}^n$” (notion définie dans le paragraphe suivant).
Par exemple, $f, g \in \mathcal{C}^n(I) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(I)$.

5. il existe une formule pour $(fg)^{(n)}$ appelée formule de Leibniz mais qui est hors programme.

3.2 Régularité

La plupart des fonctions usuelles sont dérivables n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais il est aussi possible qu'une fonction soit par exemple dérivable 2 fois, mais pas 3 fois. Une première raison pour cela, est un exemple que nous avons déjà rencontré : la dérivée d'une fonction peut n'être pas continue, donc a fortiori pas dérivable. Reprenons cet exemple :

Exemple 6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ alors :

- <u>la fonction f est dérivable en 0</u>. En effet, pour $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc $f'_g(0) = 0$; et pour $x > 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$
(car $\sin(1/x)$ est bornée et $x \to 0$) donc $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$. Ainsi $f'(0) = 0$.
- <u>et f' n'est pas continue en 0</u>. En effet, pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \times (-\frac{1}{x^2}) \times \cos(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$
avec $2x \sin(1/x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\cos(1/x)$ qui n'a pas de limite en 0, donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

On souhaite exclure ce genre de cas “pathologiques” des fonctions que nous considérerons. On impose donc une condition de continuité supplémentaire dans la définition suivante :

Définition 13
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que <u>f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I</u>, et on note $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou simplement $f \in \mathcal{C}^n(I)$, lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque 14
- Par exemple, $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions
- Dans la définition de $\mathcal{C}^n$ on ne demande pas que les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ pour $k < n$ soient continues : elles le sont automatiquement puisqu'elles sont
- Pour $n = 0$, dire que f est $\mathcal{C}^0$ sur I signifie donc simplement que f est *continue* sur I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 15
On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des telles fonctions f.

Exemple 7 Toute fonction polynomiale est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$.

Remarque 16
Attention, $\boxed{\text{dérivable } n \text{ fois} \neq \text{de classe } \mathcal{C}^n}$ puisqu'être $\mathcal{C}^n$ requiert en plus la continuité de la dérivée n-ème. Si l'on note D^n l'ensemble des fonctions dérivables n fois on a : $D^n \subsetneq \mathcal{C}^n$. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$ de l'exemple 11 est dérivable 1 fois mais pas $\mathcal{C}^1$.

La classe d'une fonction indique sa "régularité" : une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ est plus régulière qu'une fonction $\mathcal{C}^n$ au sens où son graphe est plus "lisse". Par exemple, une fonction $\mathcal{C}^1$ est plus régulière qu'une fonction seulement $\mathcal{C}^0$.

Exemple 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
Plus précisément, f_n est dérivable $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$, mais $f_n^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, pour $n > 1$, montrons que $f_n' = f_{n-1}$:

Reste donc à voir que f_1 n'est pas dérivable en 0 :

-
-

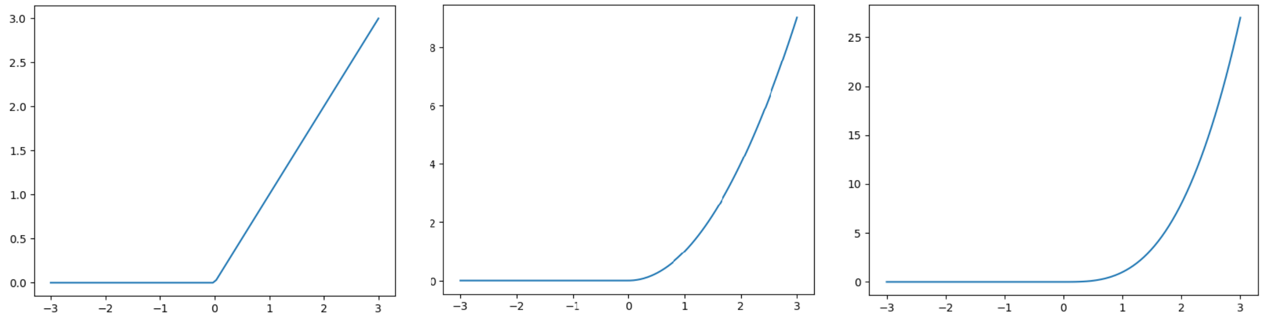

FIGURE 1 – graphes des fonctions f_1, f_2 et f_3

Exercice 7

Soit $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que φ est continue en 0.
2. Montrer que φ est dérivable en 0.
3. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x > 0,\ \varphi^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x})$$

   (on donnera le lien entre P_{n+1} et P_n).

5. En déduire que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Les fonctions suivantes sont-elles :

- continues ?
- dérivables ?
- de classe $\mathcal{C}^1$?

sur leurs ensembles de définition.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{1+|x|}$
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
3. $h : x \longmapsto \begin{cases} \ln(2x+1) & \text{si } x > 1 \\ \ln(3-2x) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
4. $u : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)\ln(2x+1) & \text{si } x > 1 \\ (x^2-1)\ln(3-2x) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
5. $v : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
6. $w : x \longmapsto (1-x)^2 \ln(1-x^2)$ prolongé par continuité en 1.