Exercice 1
En revenant à la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes en tout point x_0 où elle existe :

1. $x \longmapsto x^3$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 2
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ? de classe $\mathcal{C}^1$?

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
2. $g : x \longmapsto x\sin(x)\sin(1/x)$ complétée par $g(0) = 0$.

Exercice 3
Soit $f : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer l'expression de f'.
2. Qu'en déduire sur f ?
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
4. Vérifier vos résultats en traçant le graphe de f sur Géogebra : `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`

Exercice 4
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 5

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{2}\left((k+1)^{2/3} - k^{2/3}\right) \leq \dfrac{1}{k^{1/3}}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}$.

Exercice 6
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$. On la note α.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n$.
4. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 7
Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Justifier que (x_n) est bien définie en montrant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [1, 2]$.
2. Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, quelle(s) valeur(s) peut prendre ℓ ?
3. Montrer que pour tous $x, y \in [1, 2],\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.
4. Montrer que (x_n) converge.