TD 20 exo 18

1) Pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ on a :

si $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(**)$

alors $f(\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u)) = f(0_{\mathbb{R}^3})$

donc $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Or $f^3 = 0$ donc $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$

Donc $f(\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u)) = f(0_{\mathbb{R}^3})$

donc $\lambda_1 f^2(u) + \lambda_2 f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, or $f^3 = 0$

donc $\lambda_1 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Or $f^2(u) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.

Reprenant $(*)$ il vient donc $\lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\lambda_2 = 0$.

Reprenant $(**)$ il vient donc $\lambda_3 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\lambda_3 = 0$.

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc $(u, f(u), f^2(u))$ est une famille libre contenant $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Comme $f(u) = 0u + 1f(u) + 0f^2(u)$

$f(f(u)) = 0u + 0f(u) + 1f^2(u)$

et $f(f^2(u)) = f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$

on a donc $\mathrm{Mat}_{(u, f(u), f^2(u))}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.