NOM :

PRENOM :

Question 1. Soient G et H deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(G, H)$.

1. à propos du noyau... (**/2pts)**
   (a) Donner la définition de $Ker(\phi)$.
   $Ker(\phi) = \{x \in G : \phi(x) = 0_H\}$
   (b) Compléter l'équivalence :
   ϕ est injective $\iff$ $Ker(\phi) = \{0_G\}$
2. à propos de l'image... (**/2pts)**
   (a) Donner la définition de $Im(\phi)$.
   $Im(\phi) = \{\phi(x),\ x \in G\}$
   (b) Compléter l'équivalence :
   ϕ est surjective $\iff$ $Im(\phi) = H$
3. à propos du rang... (**/2pts)**
   (a) Donner la définition de $rg(\phi)$.
   $rg(\phi) = dim(Im(\phi))$
   (b) On rappelle que $\phi \in \mathcal{L}(G, H)$, et on note $q = \dim(G)$ et $r = \dim(H)$. Cocher les 2 équivalences correctes :

   ☐ ϕ est surjective $\iff$ $rg(\phi) = q$
   ☒ ϕ est injective $\iff$ $rg(\phi) = q$
   ☒ ϕ est surjective $\iff$ $rg(\phi) = r$
   ☐ ϕ est injective $\iff$ $rg(\phi) = r$

Question 2 (**/4pts).**

Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -y, -3x - y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $rg(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1) Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $f(u+v) = f(x+x', y+y') = (x+x'+2(y+y'), -(y+y'), -3(x+x') - (y+y'))$
$= (x+2y, -y, -3x-y) + (x'+2y', -y', -3x'-y')$
$= f(u) + f(v)$
- $f(\lambda u) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + 2\lambda y, -\lambda y, -3\lambda x - \lambda y)$
$= \lambda(x+2y, -y, -3x-y)$
$= \lambda f(u)$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

2) Comme $f(1,0) = (1, 0, -3)$ et $f(0,1) = (2, -1, -1)$, on a, en utilisant la matrice de f dans les bases canoniques, que :
$$rg(f) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3) Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et que $rg(f) = 2 = dim(\mathbb{R}^2) \neq dim(\mathbb{R}^3)$, l'application f est injective mais pas surjective. Elle n'est donc pas bijective.

NOM :

PRENOM :

Question 1. Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$.

1. à propos du noyau... (/2pts)
   (a) Donner la définition de $Ker(\phi)$.
   $Ker(\phi) = \{x \in V : \phi(x) = 0_W\}$
   (b) Compléter l'équivalence :
   ϕ est injective $\iff$ $Ker(\phi) = \{0_V\}$
2. à propos de l'image... (/2pts)
   (a) Donner la définition de $Im(\phi)$.
   $Im(\phi) = \{\phi(x), x \in V\}$
   (b) Compléter l'équivalence :
   ϕ est surjective $\iff$ $Im(\phi) = W$
3. à propos du rang... (/2pts)
   (a) Donner la définition de $rg(\phi)$.
   $rg(\phi) = dim(Im(\phi))$
   (b) On rappelle que $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$, et on note $d = \dim(V)$ et $q = \dim(W)$. Cocher les 2 équivalences correctes :
   - [x] ϕ est surjective $\iff$ $rg(\phi) = q$
   - [ ] ϕ est injective $\iff$ $rg(\phi) = q$
   - [ ] ϕ est surjective $\iff$ $rg(\phi) = d$
   - [x] ϕ est injective $\iff$ $rg(\phi) = d$

Question 2 (/4pts).

Soit f l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + z, -x - 2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $rg(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1) Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $f(u+v) = f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+2(y+y')+z+z', -(x+x')-2(z+z'))$
  $= (x+2y+z, -x-2z) + (x'+2y'+z', -x'-2z')$
  $= f(u) + f(v)$
- $f(\lambda u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + 2\lambda y + \lambda z, -\lambda x - 2\lambda z)$
  $= \lambda(x+2y+z, -x-2z)$
  $= \lambda f(u)$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

2) Comme $f(1,0,0) = (1,-1)$, $f(0,1,0) = (2,0)$ et $f(0,0,1) = (1,-2)$, on a, en utilisant la matrice de f dans les bases canoniques, que :

$$rg(f) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

3) Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et que $rg(f) = 2 = dim(\mathbb{R}^2) \neq dim(\mathbb{R}^3)$, l'application f est surjective mais pas injective. Elle n'est donc pas bijective.