Programme de colles : semaine 29 du 10/6 au 14/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications linéaires

Dans la suite E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. *On travaille le plus souvent avec $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^p$, mais des exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$ ont aussi été présentés en classe.*

- définition de la linéarité, proposition : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E)=0_F$
- savoir montrer qu'une application est ou n'est pas linéaire
- opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances (si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k fois) avec la convention $f^0 = Id_E$), bijection réciproque
- vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- noyau d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $Ker(f)$ est un s.e.v de E. f est injective ssi $Ker(f)=\{0_E\}$
- image d'une application linéaire. Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E alors $Im(f) = Vect(f(u_1),\dots,f(u_n))$. f est surjective ssi $Im(f)=F$
- rang d'une application linéaire. ***Attention : le théorème du rang n'est pas un attendu du programme de 1ère année.***
- Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(F)=p$ alors :
  - f est injective ssi $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ est libre ssi $\mathrm{rg}(f)=n$
  - f est surjective ssi $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ est une famille génératrice de F ssi $\mathrm{rg}(f)=p$
  - f est bijective ssi $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ est une base de F ssi $\mathrm{rg}(f)=p=n$
- En particulier, s'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\dim(E)=\dim(F)$.
- matrice d'une application linéaire : savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données, et inversement déterminer une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases
- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ
- si $\dim(E)=n$ et $\dim(F)=p$, correspondance entre l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et l'application $\begin{array}{rccc} : & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$ où A est la matrice de f dans des bases fixées.
- matrices d'une combinaison linéaire, d'une composée (d'une puissance) d'applications linéaires, d'une bijection réciproque
- si A est une matrice de f dans des bases quelconques alors $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(A)$
- Calcul du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire en utilisant sa matrice

2 Dérivabilité

Attention, les théorèmes usuels : Rolle, TAF et leurs utilisations n'ont pas encore été abordés en classe.

- dérivée d'une fonction :
  - définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
  - dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Exemples d'études de dérivabilité en un point de "recollement".
  - dérivable implique continue
- calculs de dérivées :
  - rappels sur les dérivées usuelles, la dérivation de produits, sommes, quotients, et de composées
  - dérivée de la bijection réciproque : si f est bijective et si $f(x_0) = y_0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 ssi $f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. Exemple de la dérivée de arctan.
- dérivées d'ordre supérieur, régularité :
  - notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
  - notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
  - exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$
  - Exemples d'études de régularité en un point de "recollement" ($x \longmapsto x^n$, et $x \longmapsto \exp(-1/x)$ recollé avec 0 en 0^-).

3 Informatique

Reprise du programme précédent (simulation d'expériences aléatoires avec la bibliothèque `random`*)*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ choisie par l'examinateur (avec $n, p \in \{1, 2, 3, 4\}$) est linéaire.
2. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
3. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ et démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une condition nécessaire et suffisante[1] sur $Ker(f)$ / sur $Im(f)$ pour que f soit injective / soit surjective.

1. note aux élèves : vous rappelez-vous ce que veut dire l'expression "condition nécessaire et suffisante" ?

5. Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ choisie par l'examinateur (avec $n, p \in [\![1, 4]\!]$), déterminer la matrice de f dans les bases canoniques. *On attend une justification courte ne pouvant pas se limiter à "je récupère les coefficients devant x, y, z et je les range en ligne ou en colonne dans la matrice".*
6. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Quid de la réciproque ?
7. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
8. Rappeler les ensembles de départ et d'arrivée pour lesquels la fonction arctan est bijective, puis montrer qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer l'expression de sa dérivée.
9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
10. Déterminer la dérivée n-ème de $f : x \longmapsto e^{2x}$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calculs "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans la feuille de :

Calcul d'intégrales : Remédiation 14, exo 2 :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=4948`
Attention : *pas de primitives avec des fonctions composées autres que $g : x \longmapsto f(ax+b)$ où on connaît une primitive de f, et nous n'avons pas fait de calcul d'intégrales utilisant une décomposition en éléments simples.*
La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.