Feuille de cours 22 : primitives usuelles

1 Primitives immédiates

Dans le tableau suivant, on donne des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et leurs primitives $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle I en notant $c \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration.

$f(x)$	I	$F(x)$
a $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ax + c$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
x^n $(n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x) + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x) + c$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x) + c$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + c$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

Exercice 1

Déterminer les primitives de :

1. $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \longmapsto \sqrt{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$
3. $x \longmapsto 2e^{4x} + \frac{1}{3}x^8$ sur $\mathbb{R}$
4. $x \longmapsto \frac{1}{3x} + \ln(2x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$
5. $x \longmapsto \frac{1}{x^7} + 7$ sur $\mathbb{R}_*^+$
6. $x \longmapsto \frac{1}{5x+2}$ sur $]-\frac{2}{5}, +\infty[$
7. $x \longmapsto \frac{1}{5x+2}$ sur $]-\infty, -\frac{2}{5}[$
8. $x \longmapsto 2\sin(2x) + 2\cos(2x) + 2x + 2$ sur $\mathbb{R}$

2 Primitives par composée

Rappel : Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : u(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables alors la fonction $f \circ u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$.

Ainsi, si on reconnaît un "motif" en $u'(x)f'(u(x))$ on peut intégrer en $f(u(x)) + c$!

"motif" en $u'(x)f'(u(x))$	Primitive en $f(u(x)) + c$	valable sur tout intervalle où
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement négative
$u'(x)\ u(x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$		
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	u dérivable
$u'(x)\ \sin(u(x))$		u dérivable
	$\sin(u(x)) + c$	u dérivable
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2+1}$	$\arctan(u(x)) + c$	u dérivable

Exercice 2
Donnez les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles demandés :

1. (a) $f_1 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)^5$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $f_2 : x \longmapsto x\cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $f_3 : x \longmapsto e^{\cos(x)}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$
   (e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0,\pi[$
   (f) $f_5 : x \longmapsto \tan(x)$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$

2. (a) $g_1 : x \longmapsto x\sin(2x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $g_2 : x \longmapsto xe^{2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $g_3 : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $g_4 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^4}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$
   (e) $g_5 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ sur $\mathbb{R}$