Mathématiques - mercredi 12 juin 2024
Devoir n°9 Durée : 2 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Ce sujet est constitué de 4 exercices indépendants.**
- **L'exercice 1 est à rédiger sur une copie séparée.**

Exercice 1 (Informatique).
On dispose de trois urnes :

- l'urne 1 contient 2 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule bleue,
- l'urne 2 contient 2 boules rouges, 1 boule verte et 2 boules bleues, et
- l'urne 3 contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 2 boules bleues.

On choisit une des trois urnes au hasard de sorte que les probabilités de choisir les urnes 1, 2 et 3 sont respectivement $0,35$, $0,4$ et $0,25$. On tire ensuite uniformément au hasard une boule dans l'urne choisie.

1. Écrire une fonction `choix_urne` ne prenant rien en argument et renvoyant le numéro de l'urne choisie.
2. En déduire une fonction `tirage` ne prenant rien en argument et renvoyant la couleur de la boule tirée dans l'expérience décrite.
3. Écrire un code Python permettant d'estimer la probabilité que la boule tirée soit rouge.

Exercice 2 (Dérivabilité).

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(2-3x) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(2) - \dfrac{3}{2}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (Une marche aléatoire)**.**
Un crabe se déplace sur une droite graduée en effectuant une série de déplacements horizontaux de longueurs $+1$ ou -1.
On suppose qu'à l'instant initial, le crabe se situe à la position $x = 0$. Il effectue ensuite n sauts successifs et indépendants. À chaque saut, il se déplace de 1 unité vers la droite avec probabilité p, ou de 1 unité vers la gauche avec probabilité $1-p$, où $p \in [0,1]$ est un paramètre fixé.
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au k-ème déplacement du crabe c'est-à-dire que : $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1-p$.

On note S_n la position du crabe à la fin des n déplacements. On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

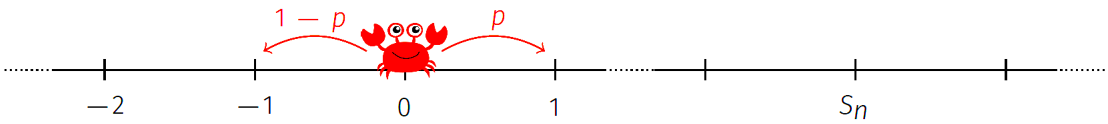

FIGURE 1 – Un crabe se déplaçant sur une droite graduée.

1. (a) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, déterminer l'espérance et la variance de X_k.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de S_n.

On cherche maintenant à décrire entièrement la loi de S_n.

2. (a) Donner la loi de S_1.
   (b) Déterminer la loi de S_2.
3. Soit Z_n la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite faits par le crabe au cours des n sauts.
   (a) Quelle est la loi de Z_n ? Justifier.
   (b) Exprimer S_n en fonction de Z_n.
   (c) En déduire l'ensemble des valeurs prises par S_n ainsi que sa loi.

Un vacancier surprend le crabe à un moment donné de sa suite de n déplacements. On suppose que l'instant T auquel le vacancier observe le crabe suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. La position du crabe est alors $S_T = \sum_{k=1}^{T} X_k$. Les questions suivantes visent à déterminer la valeur de $\mathbb{E}(S_T)$.
Notez que dans la somme définissant S_T, la borne supérieure est elle-même une variable aléatoire. En particulier, on ne peut donc pas calculer directement l'espérance de S_T par linéarité.

4. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note V_k la variable aléatoire valant 1 si $T \geq k$ et 0 sinon.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(T \geq k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
   (b) En déduire la loi de V_k.
   (c) Montrer que $S_T = \sum_{k=1}^{n} V_k X_k$.
   (d) Conclure en déterminant la valeur de $\mathbb{E}(S_T)$.

Exercice 4 (Algèbre linéaire)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomporphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble E des matrices M qui commuttent avec A, c'est-à-dire l'ensemble

$$E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ AM = MA\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer, en justifiant proprement, l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, -1, -2)$ et $w = (2, 1, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
   (c) Déterminer $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (d) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (e) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $B = P^{-1}MP$.
   (a) Montrer que : $M \in E \iff BD = DB$.
   (b) En déduire que si $M \in E$ alors il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^{-1}$.
5. Dans cette question, on considère l'application ϕ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & Q & \longmapsto & (Q(2), Q(4), Q(8)) \end{array}$$

   On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ *désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à* 2.

   (a) Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
   (b) Montrer que $Ker(\phi) = \{0\}$.
   (c) En déduire que ϕ est un isomorphisme. *On pourra s'intéresser au rang de* ϕ*.*
6. Pour $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $Q(M) = aM^2 + bM + cI_3$. On note F l'ensemble suivant :

$$F = \{Q(A), \ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}.$$

   Dans cette question on montre que $E = F$ par double inclusion.
   (a) Montrer que $F \subset E$.
   (b) Soit $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. En utilisant la question 5 montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$.
   (c) En utilisant la question 4, en déduire que $E \subset F$. *On rappelle que* $A = PDP^{-1}$*.*