DS 9 : Corrigé

• = Barème sur 10 pts

Exercice 1 :

```python
import random as rd
```
→ 1 pt

1)
```python
def choix_urne():
    t=rd.random()
    if t<=0.35 :
        return 1
    elif t<= 0.35+ 0.4 :
        return 2
    else :
        return 3
```
→ 3 pts

2)
```python
def tirage():
    u = choix_urne()
    if u==1:
        L = ['R','R','V','V','B']
    if u== 2:
        L = ['R','R','V','B','B']
    if u==3:
        L = ['R','V','V','B','B']
    return rd.choice(L)
```
→ 3 pts

3)
```python
N=10 000
X=0
for k in range(N):
    b=tirage()
    if b=='R':
        X=X+1
p=X/N
print(p)
```
→ 3 pts

Exercice 2

1) Sur $\mathbb{R}_*^+$: La fonction $x \mapsto \ln(2) - \frac{3}{2}x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ en tant que fonction affine. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Sur $\mathbb{R}_*^-$: La fonction $x \mapsto 2-3x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^-$ en tant que fonction affine et est à valeurs dans $[2,+\infty[$. De plus la fonction $\ln$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[2,+\infty[$. Par composition f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

En conclusion, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$

2) Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{à droite : } \ln(2) - \frac{3}{2}x \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2) \\ \text{à gauche : } \ln(2-3x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2) \end{array}\right\} \text{donc } f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2) = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$:

à droite, $\dfrac{\ln(2) - \frac{3}{2}x - \ln(2)}{x} = -\dfrac{3}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{3}{2}$

à gauche : $\dfrac{\ln(2-3x) - \ln(2)}{x} = \dfrac{\ln(1-\frac{3}{2}x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{3}{2}x}{x} = -\dfrac{3}{2}$

Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{3}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{3}{2}$

4) Déterminons si on a $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{à droite : pour } x>0,\ f'(x) = -\frac{3}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3}{2} \\ \text{à gauche : pour } x<0,\ f'(x) = \dfrac{-3}{2-3x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \text{donc } f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3}{2} = f'(0)$$

Finalement f' est continue en 0 ; comme d'après 1) f' est déjà continue sur $\mathbb{R}^*$ on en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1) a) Comme $X_k(\Omega)=\{-1,1\}$ on a :

$$\mathbb{E}(X_k) = 1\times \mathbb{P}(X_k=1) + (-1)\times \mathbb{P}(X_k=-1)$$
$$= p-(1-p)$$
$$= 2p-1$$

$$\mathbb{E}(X_k^2) = 1^2\times \mathbb{P}(X_k=1) + (-1)^2\, \mathbb{P}(X_k=-1)$$
$$= \mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_k=-1)$$
$$= 1$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens

$$\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2$$
$$= 1-(2p-1)^2$$
$$= 4p(1-p)$$

b) Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = n(2p-1)$$

Comme les déplacements du crabe sont indépendants, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = 4np(1-p)$$

2) a) Comme $S_1 = X_1$ on a $S_1(\Omega)=\{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(S_1=1)=p$, $\mathbb{P}(S_1=-1)=1-p$

b) Comme $S_2 = X_1+X_2$ on a :

- $S_2(\Omega) = \{x_1+x_2,\ x_1\in X_1(\Omega),\ x_2\in X_2(\Omega)\}$
$$= \{x_1+x_2,\ x_1,x_2\in\{-1,1\}\}$$
$$= \{-1-1,\ -1+1,\ 1-1,\ 1+1\}$$
$$= \{-2,0,2\}$$

puis $(S_2=2)=(X_1+X_2=2)=(X_1=1)\cap(X_2=1)$

$(S_2=-2)=(X_1+X_2=-2)=(X_1=-1)\cap(X_2=-1)$

donc, comme les variables X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(S_2=2)=\mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}(X_2=1)=p^2$$

$$\mathbb{P}(S_2=-2)=\mathbb{P}(X_1=-1)\times\mathbb{P}(X_2=-1)=(1-p)^2$$

Enfin, les événements $(S_2=2)$, $(S_2=-2)$ et $(S_2=0)$ formant un système complet d'événements, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2=0)&=1-\mathbb{P}(S_2=2)-\mathbb{P}(S_2=-2)\\&=1-p^2-(1-p)^2\\&=2p(1-p)\end{aligned}$$

(n.b : on pouvait aussi dire que :

$(S_2=0)=\big((X_1=1)\cap(X_2=-1)\big)\cup\big((X_1=-1)\cap(X_2=1)\big)$

Or $(X_1=1)\cap(X_2=-1)$ et $(X_1=-1)\cap(X_2=1)$ sont incompatibles donc

$$\mathbb{P}(S_2=0)=\mathbb{P}\big((X_1=1)\cap(X_2=-1)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=-1)\cap(X_2=1)\big)$$

puis par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2=0)&=\mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=-1)+\mathbb{P}(X_1=-1)\,\mathbb{P}(X_2=1)\\&=p(1-p)+(1-p)p\\&=2p(1-p)\end{aligned}$$

)

En conclusion, la loi de S_2 peut se résumer dans le tableau suivant :

$S_2(\Omega)$	-2	0	2
$\mathbb{P}(S_2=\cdot)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

3) a) Z_n suit une loi binomiale de paramètres n et p : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
En effet, Z_n compte le nombre de déplacements vers la droite lors de n sauts indépendants où la probabilité de sauter vers la droite est p.

b) Puisque le crabe fait Z_n saut vers la droite, il en fait $n-Z_n$ vers la gauche. On a donc

$$S_n = 1Z_n + (-1)(n-Z_n) = 2Z_n - n.$$

c) Dès lors, $S_n(\Omega) = \{2k-n,\ k \in Z_n(\Omega)\}$

$$= \{2k-n,\ k\in [\![0,n]\!]\}$$

$$= \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n\}$$

et pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(2Z_n - n = 2k-n) = \mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4) a) Puisque T suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ on a :

$$P(T \geqslant k) = \frac{\mathrm{Card}(T\geqslant k)}{n} = \frac{\mathrm{Card}(\{k, k+1, \dots, n\})}{n} = \frac{n-k+1}{n}$$

b) Par définition, $V_k(\Omega) = \{0,1\}$, V_k suit donc une loi de Bernoulli.
De plus, $\mathbb{P}(V_k = 1) = \mathbb{P}(T\geqslant k) = \frac{n-k+1}{n}$.
Ainsi V_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$.

c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si $T=i$ alors on a

$$V_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leqslant i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} V_k X_k = \sum_{k=1}^{i} X_k = \sum_{k=1}^{T} X_k = S_T$$

Ainsi, quelle que soit la valeur prise par T on a bien $S_T = \sum_{k=1}^{n} V_k X_k$.

d) Tout d'abord, par linéarité,

$$\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} V_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(V_k X_k).$$

Ensuite, l'arrivée du vacancier étant indépendante des déplacements du crabe, les variables V_k et X_k sont indépendantes.

Donc $\mathbb{E}(V_k X_k) = \mathbb{E}(V_k)\mathbb{E}(X_k)$

On a déjà vu que $\mathbb{E}(X_k) = 2p-1$, et comme V_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$ on a $\mathbb{E}(V_k) = \frac{n-k+1}{n}$.

Finalement,

$$\mathbb{E}(S_T) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(V_k)\mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} \times (2p-1)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \sum_{l=1}^{n} l \qquad \left(\text{via } l = n-k+1 \text{ donc } 1 \leq k \leq n \iff -n \leq -k \leq -1 \iff 1 \leq n-k+1 \leq n\right)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2p-1)}{2}$$

Exercice 4 :

1) • Notant O la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$A \times O = O = O \times A \quad \text{donc } O \in E$$

• Soient $M_1, M_2 \in E$ alors $AM_1 = M_1 A$ et $AM_2 = M_2 A$ donc

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1 A + M_2 A = (M_1 + M_2) A$$

donc $M_1 + M_2 \in E$

• Soient $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $AM = MA$ donc

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M) A$$

donc $\lambda M \in E$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5x+6y-3z \\ x+6y-z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}$$

donc $f(x,y,z) = (5x+6y-3z,\ x+6y-z,\ -x+2y+3z)$

3)a) On calcule

$$\mathrm{rg}(u,v,w) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$=3$$

donc la famille (u,v,w) a un rang égal à son nombre de vecteurs donc cette famille est libre. Comme de plus elle compte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, on en déduit que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculons, grâce à l'expression trouvée en 1) :

$$f(u) = f(1,0,1) = (2,0,2) = 2(1,0,1) = 2u + 0v + 0w$$

$$f(v) = f(0,-1,-2) = (0,-4,-8) = 4(0,-1,-2) = 0u + 4v + 0w$$

$$f(w) = f(2,1,0) = (16,8,0) = 8(2,1,0) = 0u + 0v + 8w$$

On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Comme

$$id_{\mathbb{R}^3}(u) = u = (1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$id_{\mathbb{R}^3}(v) = v = (0,-1,-2) = 0e_1 - 1e_2 - 2e_3$$

$$id_{\mathbb{R}^3}(w) = w = (2,1,0) = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) (n.b : ici, la valeur de P^{-1} était donnée par l'énoncé, il serait donc maladroit de résoudre $PX = Y$ pour trouver P^{-1} : cf concours blanc)

Notons $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule que

$$QP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$$

et $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$

Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

e) On calcule :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & 8 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

4) a) On a :

$$M\in E \iff AM=MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1}$$
$$\iff P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1}$$
$$\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P$$
$$\iff DB = BD$$

b) Déterminons quelles sont les matrices $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $BD=DB$:

$$BD=DB \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2a & 4b & 8c \\ 2d & 4e & 8f \\ 2g & 4h & 8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4d & 4e & 4f \\ 8g & 8h & 8i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2a=2a,\ 4b=2b,\ 8c=2c,\ 2d=4d \\ 4e=4e,\ 8f=4f,\ 2g=8g,\ 4h=8h \text{ et } 8i=8i \end{pmatrix}$$

$$\iff b=c=d=f=g=h=0$$

$$\iff B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale.}$$

Dès lors, si $M\in E$, on a d'après a) $BD=DB$, donc la matrice $B=P^{-1}MP$ est diagonale, notons-la Δ.
Il existe donc une matrice diagonale Δ telle que $\Delta = P^{-1}MP$ donc $P\Delta = MP$ donc $M=P\Delta P^{-1}$.

5) a) Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\phi(Q_1+Q_2) = \big((Q_1+Q_2)(2), (Q_1+Q_2)(4), (Q_1+Q_2)(8)\big)$$
$$= \big(Q_1(2)+Q_2(2),\ Q_1(4)+Q_2(4),\ Q_1(8)+Q_2(8)\big)$$
$$= \big(Q_1(2), Q_1(4), Q_1(8)\big) + \big(Q_2(2), Q_2(4), Q_2(8)\big)$$
$$= \phi(Q_1) + \phi(Q_2).$$

De même,

$$\phi(\lambda Q_1) = (\lambda Q_1(2), \lambda Q_1(4), \lambda Q_1(8))$$
$$= \lambda (Q_1(2), Q_1(4), Q_1(8))$$
$$= \lambda \phi(Q_1)$$

Donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.

b) Comme $Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $\{0\} \subset Ker(\phi)$. Montrons maintenant que $Ker(\phi) \subset \{0\}$.

Soit $Q \in Ker(\phi)$ alors $\phi(Q) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $Q(2) = Q(4) = Q(8) = 0$

Donc Q admet 3 racines distinctes.

Comme de plus $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ est de degré inférieur à 2, Q a donc strictement plus de racines que son degré. Cela impose que $Q = 0$.

Ainsi $Ker(\phi) \subset \{0\}$ et donc $Ker(\phi) = \{0\}$.

c) Comme $Ker(\phi) = \{0\}$, on sait que ϕ est injective.

Comme $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ on en déduit que

$rg(\phi) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

Mais alors $rg(\phi) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc ϕ est aussi surjective.

Finalement, ϕ est bien un isomorphisme.

6) a) Soit $M \in F$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $M = Q(A)$. Notons $Q = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $M = aA^2 + bA + cI_3$

Dès lors,
$$AM = A(aA^2 + bA + cI_3)$$
$$= aA^3 + bA^2 + cA$$
$$= (aA^2 + bA + cI_3)A = MA$$

donc $M \in E$. Ainsi $F \subset E$.

b) Notons $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Comme $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et que $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ est bijectie (donc surjective) d'après 5), il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\phi(Q) = (x, y, z)$, c'est-à-dire que $Q(2) = x$, $Q(4) = y$ et $Q(8) = z$.

Notant $Q = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a donc

$$
\begin{aligned}
Q(D) &= aD^2 + bD + cI_3 \\
&= a\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^2 + b\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a2^2 + b2 + c & 0 & 0 \\ 0 & a4^2 + b4 + c & 0 \\ 0 & 0 & a8^2 + b8 + c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q(2) & 0 & 0 \\ 0 & Q(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(8) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \\
&= \Delta
\end{aligned}
$$

Ainsi il existe bien $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$.

c) Soit $M \in E$. D'après la question 4) il existe une matrice diagonale Δ tel que $M = P\Delta P^{-1}$. En utilisant la question précédente il existe donc $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$. Dès lors, on calcule que

$$
\begin{aligned}
Q(A) = Q(PDP^{-1}) &= a(PDP^{-1})^2 + bPDP^{-1} + cI_3 \\
&= aPDP^{-1}PDP^{-1} + bPDP^{-1} + cI_3
\end{aligned}
$$

$= aPD^2P^{-1} + bPDP^{-1} + cPI_3P^{-1}$

$= P(aD^2 + bD + cI_3)P^{-1}$

$= PQ(D)P^{-1}$

$= P\Delta P^{-1}$

$= M$

Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(A) = M$, donc $M \in F$.

Finalement $E \subset F$, et par double inclusion $E = F$.

Remarque : Ainsi, l'ensemble des matrices M qui commutent avec A est $E = F = \{aA^2 + bA + cI_3,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(A^2, A, I_3)$

On peut montrer que la famille (I_3, A, A^2) est libre, il s'agit donc d'une base de E et $\dim(E) = 3$.