Programme de colles : semaine 30 du 17/6 au 21/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Dérivabilité

- dérivée d'une fonction :
  - définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
  - dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Exemples d'études de dérivabilité en un point de "recollement".
  - dérivable implique continue
- calculs de dérivées :
  - rappels sur les dérivées usuelles, la dérivation de produits, sommes, quotients, et de composées
  - dérivée de la bijection réciproque : si f est bijective et si $f(x_0) = y_0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 ssi $f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. Exemple de la dérivée de arctan.
- dérivées d'ordre supérieur, régularité :
  - notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
  - notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
  - exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$
  - Exemples d'études de régularité en un point de "recollement" ($x \longmapsto x^n$, et $x \longmapsto \exp(-1/x)$ recollé avec 0 en 0^-).
- théorèmes usuels :
  - notion d'extremum local
  - si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrêmité de I, et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
  - théorème de Rolle
  - théorème des accroissements finis : *on demande de toujours revenir à l'égalité des accroisssements finis* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *; l'inégalité des accroissements finis et la majoration* $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$ *si* $|f'| \leq K$ *ont été traités en cours mais doivent être redemontrés*
  - utilisation du théorème des accroissements finis : obtention d'inégalités ; étude de la convergence de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe contractant
  - lien entre dérivée et sens de variation

2 Intégration

L'intégration par parties, le changement de variables, l'interprétation de l'intégrale comme une aire et les sommes de Riemann n'ont pas encore été vus en classe.

- notion de primitive d'une fonction continue, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante
- toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (admis)
- primitives de $f + \lambda g$ et de $x \longmapsto f(ax + b)$ (pour $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$) en fonction des primitives de f et g

- primitives immédiates à connaître : fonctions puissances, exponentielle, logarithme, sin, cos, tan, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
- primitives de fonctions composées à connaître (u est une fonction dérivable appropriée) : $u'u^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'e^u$, $u'\sin(u)$, $u'\cos(u)$, $\dfrac{u'}{u^2+1}$
- primitivation par linéarisation, par décomposition en éléments simples. *La forme de la décomposition en éléments simples sera toujours donnée aux élèves.*
- par définition, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$
- règles de calculs pour les intégrales : linéarité, relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$, $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$
- positivité et croissance de l'intégrale, application à des études de suites définies par une intégrale (sens de variation, limite par encadrement)
- inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$
- si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a,b]$
- la fonction $F_a : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a
- dérivation d'expressions du type $\phi : x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ où f est continue sur $[a,b]$ et u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $[a,b]$. *La formule ne doit pas être apprise par cœur mais redémontrée dans les exercices.*

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Quid de la réciproque ?
2. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
3. Rappeler les ensembles de départ et d'arrivée pour lesquels la fonction arctan est bijective, puis montrer qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer l'expression de sa dérivée.
4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
5. Déterminer la dérivée n-ème de $f : x \longmapsto e^{2x}$.
6. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un schéma.
7. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un schéma.
8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose qu'il existe $K \in [0,1[$ tel que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$, et que $f(\ell) = \ell$. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leq K^n |x_0 - \ell|$. Qu'en déduit-on sur (x_n) ?
9. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer que si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$, et que si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$.
10. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$. Déterminer un encadrement puis la limite de (I_n).

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.