BCPST 1B **Interro 15 (sujet A) : /10 pts** **2023-2024**

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/3 pts). Donner les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_*^+$	2. $f_2 : x \longmapsto \frac{1}{1-2x}$ sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$	3. $f_3 : x \longmapsto x^2 \cos(x^3)$ sur $\mathbb{R}$

1) $F_1 : x \longmapsto -\frac{1}{2x^2} + c, \ c \in \mathbb{R}$

2) $F_2 : x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(1-2x) + c, \ c \in \mathbb{R}$

3) $F_3 : x \longmapsto \frac{1}{3}\sin(x^3) + c, \ c \in \mathbb{R}$

Question 2 (/7 pts). Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-1}^{1} e^{1-2t}\,dt$ (/1 pt)	2. $I_2 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$ (/2 pts)	3. $I_3 = \int_0^{1/3} \frac{1}{(3t+1)^4}\,dt$ (/2 pts)	4. $I_4 = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt$ (/2 pts)

1) $I_1 = \left[\frac{e^{1-2t}}{-2}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-1}-e^{3}}{-2} = \frac{e^3-e^{-1}}{2}$

2) $I_2 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$ (car $\frac{t}{1+t^2} = \frac{\frac{1}{2}u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = 1+t^2$)

3) $I_3 = \left[-\frac{1}{9}(3t+1)^{-3}\right]_0^{1/3} = \left[-\frac{1}{9} \times \frac{1}{(3t+1)^3}\right]_0^{1/3} = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^3} - 1\right) = \frac{7}{72}$

4) On reconnaît que $\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin(\sqrt{t}) = 2u'(t)\sin(u(t))$ avec $u(t) = \sqrt{t}$

donc $I_4 = \left[-2\cos(\sqrt{t})\right]_{\pi^2}^{4\pi^2} = -2\cos(2\pi) + 2\cos(\pi) = -4$

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/3 pts). Donner les primitives des fonctions suivantes :

1. $g_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^4}$ sur $\mathbb{R}_*^+$
2. $g_2 : x \longmapsto e^{1-3x}$ sur $\mathbb{R}$
3. $g_3 : x \longmapsto x^3 \sin(x^4)$ sur $\mathbb{R}$

1) $G_1 : x \mapsto -\dfrac{1}{3x^3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

2) $G_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}e^{1-3x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

3) $G_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{4}\cos(x^4) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Question 2 (/7 pts). Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+3t}\,dt$ (/1 pt)
2. $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$ (/2 pts)
3. $J_3 = \displaystyle\int_0^{1/4} \frac{1}{(4t+1)^3}\,dt$ (/2 pts)
4. $J_4 = \displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt$ (/2 pts)

1) $J_1 = \left[\dfrac{1}{3}\ln(1+3t)\right]_1^2 = \dfrac{1}{3}\ln(7) - \dfrac{1}{3}\ln(4) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$

2) $J_2 = \left[\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ (car $\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{\frac{1}{2}u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = 1+t^2$)

3) $J_3 = \left[\dfrac{1}{-8}(4t+1)^{-2}\right]_0^{1/4} = \left[-\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{(4t+1)^2}\right]_0^{1/4} = -\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2^2} - 1\right) = \dfrac{3}{32}$

4) On reconnaît que $\dfrac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}) = 2u'(t)\cos(u(t))$ avec $u(t) = \sqrt{t}$

donc $J_4 = \left[2\sin(\sqrt{t})\right]_{\pi^2}^{4\pi^2} = 2\sin(2\pi) - 2\sin(\pi) = 0$