Exo 6 : $u_0=0$ $\quad u_{n+1}=\cos(u_n)$

1) $u_0\in[0,1]$ et si $u_n\in[0,1]$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ alors $0\leq u_n\leq 1$ donc (puisque la fonc° cos est $\searrow$ sur $[0,1]$) $\cos(0)\geq\cos(u_n)\geq\cos(1)$

Or $1\in[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(1)\geq 0$. Ainsi $1\geq u_{n+1}\geq 0$.

On a donc bien démontré par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$.

2) Posons $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos(x)-x$ Alors f est dérivable sur $[0,1]$ et :

$\forall x\in[0,1], f'(x)=-\sin(x)-1<0$ (car $\forall x\in[0,1], \sin(x)\geq 0$).

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et elle y est de plus continue donc f est une bijection de $[0,1]$ dans $f([0,1])=[f(1),f(0)]=[\cos(1)-1,1]$

Enfin, $\cos(1)-1<0<1$ donc $0\in f([0,1])$. Ainsi l'équa° $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[0,1]$: c'est $\alpha=f^{-1}(0)$. En d'autres termes, l'équa^e $\cos(x)=x$ admet une unique solution α sur $[0,1]$.

3) Montrons d'abord que : $\forall x,y\in[0,1], |\cos(x)-\cos(y)|\leq\sin(1)|x-y|$.

Pour cela, appliquons le TAF à la fonction cos sur $[x,y]$ (puisqu'elle y est dérivable) : il existe $c\in]x,y[$ tel que $\frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}=\cos'(c)=-\sin(c)$.

Comme $c\in[0,1]$ et que la fonction sin est croissante sur $[0,1]$ on a $\sin(0)\leq\sin(c)\leq\sin(1)$ donc $|\sin(c)|\leq\sin(1)$.

Ainsi $\left|\frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}\right|=|-\sin(c)|\leq\sin(1)$ donc $|\cos(x)-\cos(y)|\leq\sin(1)|x-y|$

(n.b. on a raisonné ici en supposant $x<y$, si $y<x$ le raisonnement est le même, et si $x=y$ alors $|\cos(x)-\cos(x)|\leq\sin(1)|x-x|$ reste vrai).

On en déduit alors par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leq\sin(1)^n$:

Pour $n=0$: $|u_0-\alpha|=|0-\alpha|=\alpha\leq 1=\sin(1)^0$ car $\alpha\in[0,1]$.

Si $|u_n-\alpha|\leq\sin(1)^n$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ alors, comme $\cos(\alpha)=\alpha$,

$|u_{n+1}-\alpha|=|\cos(u_n)-\cos(\alpha)|\leq\sin(1)|u_n-\alpha|$ en utilisant le résultat précédent

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$|u_{n+1}-\alpha|\leq\sin(1)\times\sin(1)^n\leq\sin(1)^{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

4) Comme $\sin(1)\in]-1,1[$ on a $\sin(1)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on en déduit donc que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\alpha$.