**Exercice 1 (intégration directe)**
Calculer les intégrales suivantes :

1. (a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 - 1\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^5 - 5x^3\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(t)\, dt$
   (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

2. (a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^7\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^7\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} + e^{1-x}\, dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\, dx$

3. (a) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \cos(x^6)\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^2 xe^{1-x^2}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^5}{x}\, dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^4}\, dt$

**Exercice 2 (intégration par parties)**

1. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} t\cos(2t)\ dt$ (b) $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^{-t}\ dt$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{t}\ln(t)\ dt$

2. Calculer pour tout $x > 0$ les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^x e^t \sin(t)\ dt$ (b) $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln(t))\, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\ln(e^{2t}+1)\, dt$

3. Déterminer les primitives de :

   (a) arctan sur $\mathbb{R}$ (b) $x \longmapsto x^2 \ln x$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (c) $x \longmapsto \ln(x)^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$

**Exercice 3 (changement de variables)**
Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. (a) $\displaystyle\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi)} e^t \cos(e^t)\ dt$ via $u = e^t$
   (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{t}-1)^4}{\sqrt{t}}\, dt$ via $u = \sqrt{t}$
   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin(t)}\, dt$ via $u = \sin(t)$

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{x^2}\, dx$ via $t = \dfrac{1}{x}$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+e^{-t}}\, dt$ avec $u = e^t$
   (c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$ via $u = \sqrt{1+x}$

3. (a) $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln(t))}{t}\ dt$ via $u = \ln(t)$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dt$ via un changement de variables à déterminer
   (c) $\displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{t}}\ dt$ via $u = \sqrt{t}$

**Exercice 4**
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et $g : x \longmapsto f(ax+b)$. Soit enfin $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donner les primitives de $g$ sur $\mathbb{R}$ en fonction de $F$, $a$ et $b$.
2. Retrouver le résultat précédent en effectuant le changement de variable $u = at + b$ sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

**Exercice 5**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a > 0$.

1. Effectuer le changement de variable $u = -x$ sur l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx$.
2. Dans cette question on suppose que $f$ est paire. Montrer alors que $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
3. Si $f$ est impaire, combien vaut $\displaystyle\int_{-a}^a f$ ?

**Exercice 6**
Soient $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$ et $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,dt$.

1. Effectuer les changements de variables $u = \cos(t)$ sur $S$, et $u = \sin(t)$ sur $C$.
2. Calculer $C + S$.
3. En déduire les valeurs de $C$ et de $S$.

**Exercice 7**
Une copie présente le raisonnement suivant pour calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx$ :

*On effectue le changement de variables* $u = \tan(x)$.
*Alors* $du = \tan'(x)\,dx = (1+\tan^2(x))\,dx = (1+u^2)\,dx$ *donc* $dx = \dfrac{1}{1+u^2}\,du$.
*De plus,* $1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ *donc* $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)} = \dfrac{1}{1+u^2}$ *et donc* $\dfrac{1}{1+\cos^2(x)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} = \dfrac{1+u^2}{2+u^2}$.
*Par ailleurs, si* $x = 0$ *alors* $u = \tan(0) = 0$ *et si* $x = \pi$ *alors* $u = \tan(\pi) = 0$.
*Ainsi* $I = \displaystyle\int_0^0 \frac{1+u^2}{2+u^2} \times \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_0^0 \frac{1}{2+u^2}\,du = 0$.

Cependant, $\forall x \in [0,\pi]$, $\dfrac{1}{1+\cos^2(x)} > 0$ donc[1] on doit avoir $I > 0$ ... Où est l'erreur ?

1. On admet ici le résultat (correct) suivant : si $a < b$ et si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

**Exercice 8**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,dt$.

1. Déterminer le sens de variation des suites $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et $(J_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de $(J_n)$ et donner un équivalent de $J_n$.

**Exercice 9**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\,dx$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)$ et en déduire qu'elle converge vers un réel $\ell$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de $\ell$.

**Exercice 10**
Etudier la monotonie des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{x}{1+x^3}\,dx$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \displaystyle\int_1^{1/n} (\ln y)^3\,dy$

**Exercice 11**
On considère la fonction $\phi$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $\phi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Déterminer le sens de variation de $\phi$ sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier le signe de $g(x) = \phi(x) - \ln x$ pour tout réel $x > 0$.
   *On pourra écrire* $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.
3. En déduire la limite de $\phi$ en 0 et en $+\infty$.

**Exercice 12**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $T-$périodique.
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.
On commencera par faire un dessin pour représenter la situation.

**Exercice 13**

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$. *On commencera par faire un dessin.*
2. On suppose que $f$ est décroissante. Quelle inégalité similaire peut-on obtenir ?
3. Démontrer que la série harmonique $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ diverge.