

Exercice 1

Résoudre :

1. $y' = 4y + 1$
2. $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x \cos(2x)$ sur \mathbb{R}_*^+
3. $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x \cos(x^3)$ sur \mathbb{R}_*^+
4. $y'(x) + 2y(x) = xe^x$ sur \mathbb{R} . On cherchera une solution particulière sous la forme $y_P : x \mapsto (ax + b)e^x$

Exercice 2

Résoudre :

1. $3y' + y = 1$ avec $y(2) = 1$
2. $\frac{1}{2}y' + y \ln(3) = 0$ (donner les solutions sous forme de puissances de 9)
3. $y'(x) + \frac{1}{x+1}y(x) = x$ sur $] -1, +\infty[$
4. $(1+x)y'(x) + y(x) = 1 + \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$
5. $(x^2 + 1)y'(x) + 2xy(x) = 3x^2 + 1$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = 3$
6. $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ sur \mathbb{R} (on appliquera la méthode de variation de la constante)
7. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur \mathbb{R}_*^+ avec $y(1) = 1$

Exercice 3Déterminer toutes les fonctions dérivables $y : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telles que :

$$\forall x > 0, xy' + x^2y^2 + y = 0.$$

On pourra poser $z = \frac{1}{y}$.**Exercice 4**Déterminer toutes les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telles que :

$$y' = y \ln(y).$$

On pourra poser $z = \ln(y)$.**Exercice 5**Dans cet exercice, on cherche à trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Donner des exemples de telles fonctions.

Considérons une fonction f solution du problème.

2. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Dériver par rapport à x la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$.
3. En déduire que f satisfait une équation différentielle du type $f'(t) = af(t)$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre cette équation différentielle.
5. Toutes les fonctions trouvées à la question précédente sont-elles solutions du problème initial ?
6. Conclure.

Exercice 6Dans cet exercice, on cherche à trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solutions du problème (\mathcal{P}) suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1. Soit f une solution du problème ci-dessus (si une telle fonction existe). On considère la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.
 - (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) En déduire que g est constante, puis que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 16$.
 - (c) En déduire que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} et qu'elle satisfait l'équation différentielle : $16f'(x) = f(x)$.
 - (d) En déduire l'expression de f .
2. Finalement, quelles sont les solutions de (\mathcal{P}) ?

Exercice 7

1. Résoudre $y'' = -9y$.
2. Les problèmes suivants sont-ils des problèmes de Cauchy ? Les résoudre.
 - (a) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y(\pi/6) = 3$
 - (b) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y'(\pi/6) = -3$
 - (c) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y'(\pi/6) = 3$

Exercice 8

On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$(E) : x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$$

c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette identité pour tout $x > 0$.

1. Cette équation rentre-t-elle dans le cadre du cours ?
2. *Analyse.* Considérons y une éventuelle solution de (E) . On définit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t).$$

- (a) Calculer z' et z'' .
 - (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
 - (c) Résoudre cette équation.
 - (d) En déduire y .
3. *Synthèse.* Les fonctions trouvées précédemment sont-elles toutes solutions de l'équation différentielle (E) ? Conclure.

Exercice 9

On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$(E) : xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0$$

c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette identité pour tout $x > 0$.

Pour toute fonction y on considère la fonction $z : x \mapsto xy(x)$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E') que l'on déterminera.
2. Conclure.