Feuille de cours 23 : équations différentielles linéaires d'ordre 2

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Parmi les équations différentielles linéaires du second ordre, i.e. de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x),$$

seules sont à savoir résoudre sans aide celles à coefficients constants : $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Le second membre d peut en revanche être une fonction simple. On étudie donc les équations différentielles :

$$(E) \ : \ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.1 Généralités

Le caractère *linéaire* de l'équation s'exprime exactement de la même manière que dans le cas du premier ordre.
Tout d'abord à travers le principe de superposition :

Proposition 1 (Principe de superposition)
Soient (E_1) et (E_2) les équations différentielles linéaires à coefficients constants suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) \ &: \ ay'' + by' + cy = f_1(x) \\ (E_2) \ &: \ ay'' + by' + cy = f_2(x) \end{aligned}$$

et soient y_1 et y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2). Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation

$$(E) \ : \ ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Remarque 2
Il s'agit bien **des mêmes coefficients** a, b, c, avec deux seconds membres différents.

Démonstration : C'est une simple vérification :

Ensuite à travers le théorème de structure de l'ensemble des solutions :

Définition 3
L'équation homogène associée à l'équation $(E)\ :\ ay''+by'+cy=f(x)$ est

$$(E_h)\ :\ ay''+by'+cy=0$$

Proposition 4
L'ensemble des solutions de l'équation $(E) : ay''+by'+cy=f(x)$ est

$$\mathcal{S}=\{y_h+y_P,\ y_h \text{ solution de l'équation homogène } (E_h)\}$$

où y_P est une solution particulière de l'équation (E).

Démonstration : C'est la même preuve qu'à l'ordre un :

2.2 Solutions de l'équation homogène

Définition 5
On appelle équation caractéristique associée à l'équation homogène $ay''+by'+cy=0$, l'équation $ar^2+br+c=0$ d'inconnue $r\in\mathbb{C}$.

Proposition 6
L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $(E_h) : ay''+by'+cy=0$ est donnée selon les solutions de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$. Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et

$$\mathcal{S}_h=\{y : x\longmapsto K_1e^{r_1x}+K_2e^{r_2x},\ K_1,\ K_2\in\mathbb{R}\}$$

- Si $\Delta=0$ alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r et

$$\mathcal{S}_h=\{y : x\longmapsto K_1e^{rx}+K_2xe^{rx},\ K_1,\ K_2\in\mathbb{R}\}$$

- Si $\Delta<0$ alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\omega$, $r_2=\alpha-i\omega$ (avec $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$) et

$$\mathcal{S}_h=\{y : x\longmapsto K_1e^{\alpha x}\cos(\omega x)+K_2e^{\alpha x}\sin(\omega x),\ K_1,\ K_2\in\mathbb{R}\}$$

Démonstration : On vérifie seulement que ces fonctions sont solutions, et on admet que ce sont les seules. Par principe de superposition, il suffit en fait de vérifier que $y_1 : x \longmapsto e^{r_1 x}$, $y_2 : x \longmapsto xe^{rx}$, $y_3 : x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ et $y_4 : x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\omega x)$ sont solutions dans chacun des cas concernés.

Exercice 1
Résoudre :

1. $y'' + 3y' - 4y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$
4. $y'' = -2y$

2.3 Solutions particulières en fonction du second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation (E) avec un second membre f :

$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$$

Le principe général est le même que dans le cas du premier ordre : on cherche une solution particulière de la même forme que le second membre.
Le cas d'un second membre constant doit pouvoir être traité sans indications. Les cas d'un second membre polynomial, exponentiel ou trigonométrique sont classiques mais la forme d'une solution particulière sera le plus souvent rappelée.

Proposition 7
Une solution y_P de l'équation différentielle à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f(x)$ peut être trouvée de la forme :

- d'une constante $y_P : x \longmapsto A$ si $f(x) = d$ est une constante,
- d'un polynôme $y_P : x \longmapsto Q(x)$ si $f(x) = P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$,
- $y_P : x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ si $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $y_P : x \longmapsto Q(x) \times (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A, B \in \mathbb{R}$ si $f(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ avec $\lambda, \mu, \omega \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Résoudre

1. $y'' + 3y' - 4y = 2$
2. $y'' - 2y' = 1$
3. $y'' + 3y' - 4y = 8x^2 + 1$, on cherchera une solution particulière sous la forme
4. $y'' + 3y' - 4y = \cos(x)$, on cherchera une solution particulière sous la forme
5. $y'' + y = \cos(x)$, on cherchera une solution particulière sous la forme

2.4 Problème de Cauchy

On a vu que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre est paramétré par deux variables libres $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Il y a donc une infinité de solutions à l'équation $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$.

Pour obtenir unicité de la solution, on peut imposer des conditions initiales. Comme il y a deux variables à fixer, il y a naturellement deux conditions initiales à imposer.

Définition 8
On appelle problème de Cauchy tout système d'équations de la forme : $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$
pour des valeurs $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ fixées.

Par exemple, $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^{2x} \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases}$ est un problème de Cauchy.

Remarque 9
Attention, il faut bien que le point x_0 soit le même dans les conditions sur y et y'. Ainsi
$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^{2x} \\ y(1) = 2 \\ y'(2) = -3 \end{cases}$ n'est pas un problème de Cauchy.

On constate sur des exemples que tout problème de Cauchy admet une unique solution. Les deux conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ conduisent en fait à un système de deux équations permettant de déterminer les deux inconnues K_1 et K_2.

Exercice 3
Résoudre :

1. $y'' + 3y' - 4y = 8$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = 4$
2. $y'' - 2y' + y = x$ avec $y(1) = y'(1) = 1$

3 Entraînement

Vérfiez vos résultats en redérivant les fonctions solutions que vous obtenez.

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y'' + y' - y = 0$
2. $\dfrac{1}{4}y'' = y' - y$
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$
4. $y'' + \omega^2 y = 0$ pour $\omega \in \mathbb{R}$
5. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_P : x \longmapsto ae^{3x}$.
6. $y'' + 2y' - 3y = 3$
7. $y'' + 2y' - 3y = 4\cos(2x)$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_P : x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
8. $y'' + 2y' + 2y = 4$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$
9. $4y'' - y = x$ avec $y(1) = 2$ et $y'(1) = 0$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_P : x \longmapsto ax + b$.