Feuille de cours 26 : fonctions de 2 variables

Dans ce chapitre on s'intéresse aux fonctions de *deux* variables réelles à valeurs réelles c'est-à-dire aux fonctions

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Voici quelques exemples :

- $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{x} + 2y$
- $f : (x,y) \longmapsto xy$
- $f : (x,y) \longmapsto e^{xy}\cos(x\ln(y))$

1 Représentation des fonctions de 2 variables

1.1 Domaine de définition

Étant donnée une expression $f(x,y)$ dépendant de deux variables réelles x et y, il n'est pas toujours facile de déterminer pour quels points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ celle-ci a un sens.
L'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel f est définie s'appelle *domaine de définition* de f. Donnons quelques exemples :

Exemples :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto \cos(xy)$ est définie sur $D_1 = \mathbb{R}^2$ tout entier ;
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{x-y}$ est définie sur $D_2 =$

En pratique pour trouver l'ensemble D, on procède comme pour les fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire qu'on écrit toutes les contraintes qu'engendrent :

- les logarithmes dont les arguments doivent être strictement positifs ;
- les racines carrées dont les arguments doivent être positifs ;
- les quotients dont les dénominateurs ne doivent pas s'annuler.

Exercice 1
Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto \sqrt{y - x^2}$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto \sqrt{xy}$

1.2 Surface représentative

Dans le cas à une variable, pour représenter une fonction de $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on trace l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $y = h(x)$, i.e. les $(x, h(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$. On obtient une *courbe* représentative de h.

Similairement, dans le cas à deux variables, pour représenter une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on trace l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $z = f(x, y)$, i.e. les $(x, y, f(x, y))$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ou plutôt, pour $(x, y) \in D$ où D est l'ensemble de défintion de f). On obtient une *surface* représentative de f.

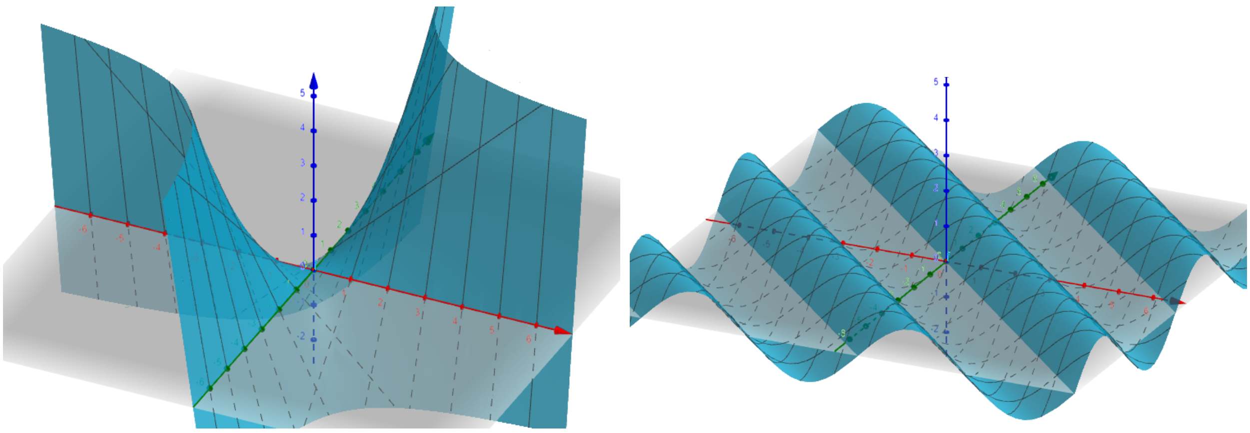


FIGURE 1 – surfaces représentatives de $f : (x, y) \longmapsto xy$ et de $g : (x, y) \longmapsto \sin(x + y)$

1.3 Lignes de niveaux

Définition 1
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, et soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau de f pour la valeur k l'ensemble $\{(x, y) \in D \ : \ f(x, y) = k\}$.

Remarque 2
1. C'est l'image réciproque de $\{k\}$ par f.
2. Ces lignes de niveaux sont les *isobares* si f représente une pression, les *isothermes* si f représente une température, etc.
3. Pour obtenir les lignes de niveau, on imagine qu'on "coupe" la surface représentative de la fonction par le plan horizontal d'équation $z = k$.

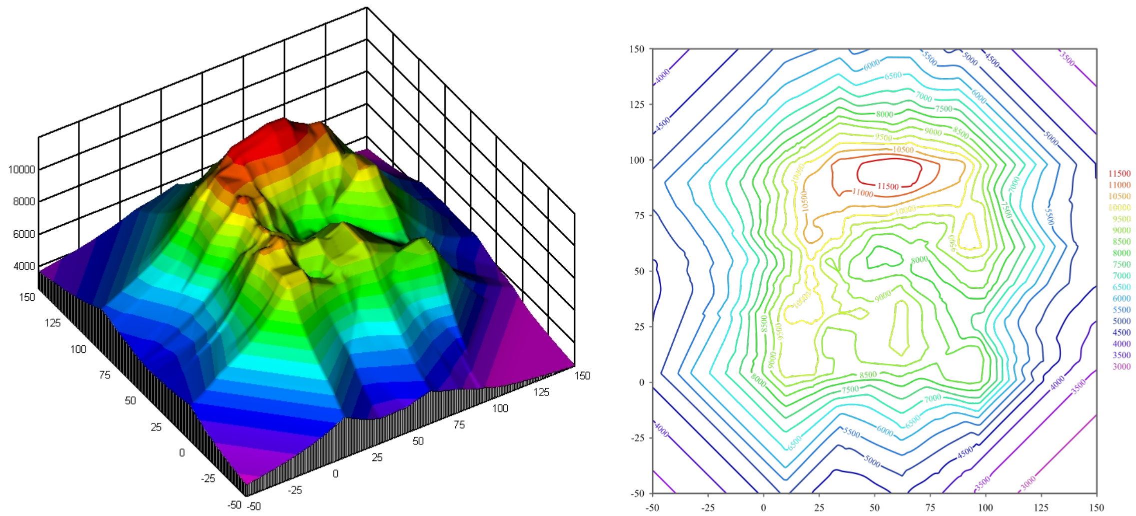


FIGURE 2 – surface représentative d'une fonction et plusieurs de ses lignes de niveau

Exercice 2
Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Déterminer les lignes de niveau de f. Représenter graphiquement f.

1.4 Applications partielles

Souvent en pratique on considère une quantité $f(x, y)$ qui dépend de deux paramètres x et y pouvant varier séparément entre une valeur minimale et une valeur maximale : $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ et $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$. Dans ce cas l'ensemble de définition de f est le *pavé* $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$.

Ce cadre relativement simple permet de définir sans difficulté les *applications partielles*, voir ci-dessous. Dans toute la suite de ce cours on énoncera les propositions pour des fonctions de deux variables définies sur des pavés $I \times J$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On signale qu'il est toutefois possible d'écrire ces résultats dans un cadre plus général (au prix de quelques lourdeurs notationnelles).

Définition 3
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$.
On appelle :

- <u>application partielle en $x = x_0$</u> la fonction $\left|\begin{array}{cccc} f(x_0, .) & : & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & y & \longmapsto & f(x_0, y) \end{array}\right.$
- <u>application partielle en $y = y_0$</u> la fonction $\left|\begin{array}{cccc} f(., y_0) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & f(x, y_0) \end{array}\right.$

Exemple : Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2y + 2x + y$.

- pour $y_0 = 1$, l'application partielle en $y_0 = 1$ est
- pour $x_0 = 1$, l'application partielle en $x_0 = 1$ est

Remarque 4
Il s'agit de *fixer* une des deux variables puis de regarder l'expression $f(x, y)$ comme une fonction de la variable non fixée.

Interprétation graphique :
Il faut être capable de faire le lien entre la surface représentative de f et les courbes représentatives des applications partielles de f. Pour cela, il faut "se placer" dans le plan $x = x_0$ ou dans le plan $y = y_0$.

Par exemple ci-dessous pour la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + \sin(y)$, l'application partielle en $x = 1$ est $h_1 : y \longmapsto 1 + \sin(y)$. Le graphe de h_1 apparaît sur la figure en tant qu'*intersection de la courbe représentative de* f *avec le plan* $x = 1$. De même l'application partielle en $y = 0$ est $k_0 : x \longmapsto x^3$ et son graphe s'obtient en tant qu'*intersection de la courbe représentative de* f *avec le plan* $y = 0$.

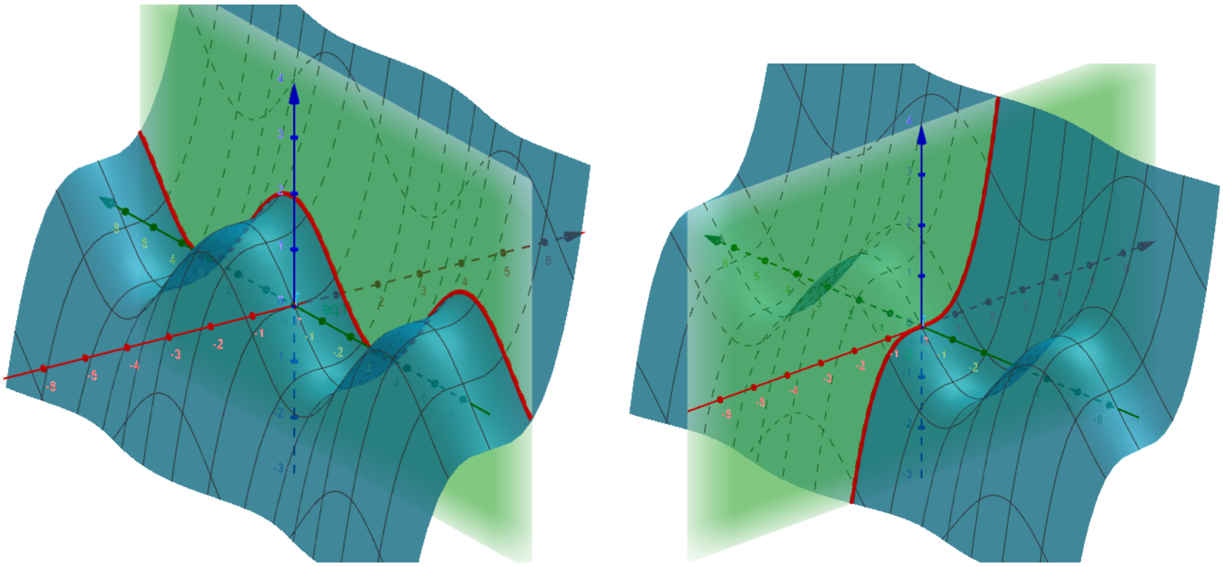


FIGURE 3 – surface représentative de $f : (x, y) \longmapsto x^3 + \sin(y)$, coupes avec les plans $x = 1$ et $y = 0$, animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/qqypy3yw`

2 Dérivées partielles

On s'intéresse le plus souvent à des fonctions de deux variables "régulières". Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il y a plusieurs niveaux de régularité : continuité, dérivabilité, caractère $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, etc.

2.1 Continuité

Définition 5
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est contiue en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Big(||(x, y) - (x_0, y_0)|| \leq \eta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon \Big).$$

On dit que f est continue sur D, et on note $f \in \mathcal{C}^0(D)$, lorsque f est continue en tout point $(x_0, y_0) \in D$.

Géométriquement, une fonction de deux variables est continue lorsque sa surface représentative n'a pas de "déchirure".

2.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Pour définir la notion de dérivée, on s'appuie sur les applications partielles i.e. sur des fonctions d'une variable.

Définition 6
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un pavé $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$. Lorsque ces quantités existent on appelle :

- dérivée partielle de f par rapport à x la fonction $\left| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h_y'(x) \end{array} \right.$
  où $h_y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application partielle $h_y : x \longmapsto f(x,y)$.
- dérivée partielle de f par rapport à y la fonction $\left| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial y} & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h_x'(y) \end{array} \right.$
  où $h_x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application partielle $h_x : y \longmapsto f(x,y)$.

Exercice 3
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto e^{xy} + y^2 - 1$
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto \ln(2x+3y)$
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto xy^2 \cos(x+y)$

Définition 7
On dit que $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé $I \times J$, et on note $f \in \mathcal{C}^1(I \times J)$, lorsque les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f existent et sont continues sur $I \times J$.

Définition 8
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Lorsque les dérivées partielles de f existent, on appelle gradient de f, et on note ∇f la fonction :

$$\begin{array}{cccc} \nabla f & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{array}$$

Proposition 9
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction de deux variables, et soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ deux fonctions d'une variable. Alors la fonction

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & t & \longmapsto & f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) = \varphi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big) + \psi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Démonstration : admis.

Remarque 10
L'identité ci-dessus s'écrit aussi $F'(t) = \big(\varphi'(t), \psi'(t)\big) . \nabla f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$.

2.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 11
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Lorsque les dérivées partielles de f existent et admettent des dérivées partielles, on définit les dérivées partielles secondes de f, notées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, par les formules :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times J$, et on note $f \in \mathcal{C}^2(I \times J)$ lorsque toutes ces dérivées existent et sont continues sur $I \times J$.

Remarque 12
1. Les dérivées partielles secondes sont des fonctions définies sur $I \times J$. Attention, il conviendra d'écrire $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$ et non $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$
2. On peut généraliser cette notion à des dérivées d'ordres supérieurs, ainsi par exemple $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)\right)$

A priori l'ordre dans lequel sont effectuées les dérivations compte, c'est-à-dire qu'il est possible que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$. Le théorème suivant indique que cela n'arrive pas pour les fonctions suffisamment régulières :

Théorème 13 (théorème de Schwarz)
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $f \in \mathcal{C}^2(I \times J)$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

Démonstration : admis.

Exercice 4
Vérifier le théorème de Schwarz sur les fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto x^3y - y^2x + x - y$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto xe^y + y^2e^x$

Exercice 5
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer son gradient puis vérifier le théorème de Schwarz.

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto \sin(y^2x)$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{x+y}$

3 Optimisation

3.1 Points critiques et extrema

Définition 14
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle point critique de f tout point $(x, y) \in D$ tel que $\nabla f(x, y) = 0$ i.e. tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Définition 15
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f admet :

- un maximum global en (x_0, y_0) lorsque : $\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- un minimum global en (x_0, y_0) lorsque : $\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
- un maximum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe un pavé $I \times J \subset D$ contenant (x_0, y_0) et tel que : $\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- un minimum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe un pavé $I \times J \subset D$ contenant (x_0, y_0) et tel que : $\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

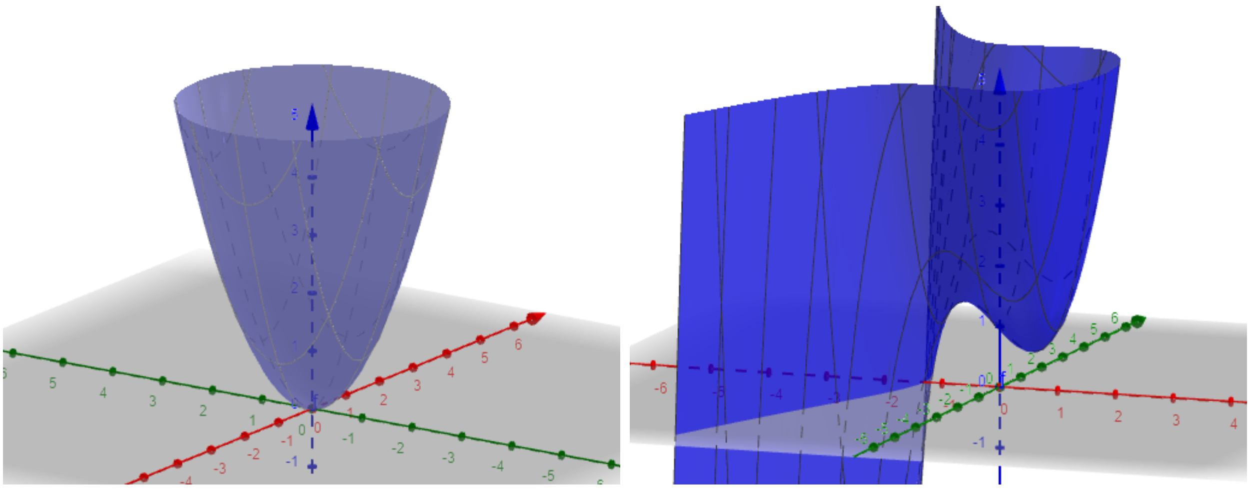


Figure 4 – À gauche un minimum global, à droite un minimum local non global

Remarque 16

1. On parle d'extremum (local ou global) pour désigner un minimum ou un maximum (local ou global).
2. Un extremum global est toujours un extremum local, mais un extremum local n'est pas forcément global.

Proposition 17
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $(x_0, y_0) \in D$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

démonstration : admis

Remarque 18
La réciproque est fausse : un point critique de f n'est pas forcément un extremum local de f. On peut donner deux contre-exemples :

1. Tout d'abord, la proposition 17 est l'analogue de la proposition concernant les fonctions d'une variable :

$$\text{Si } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ admet un extremum local en } x_0 \in \mathbb{R} \text{ alors } f'(x_0) = 0.$$

   Or on sait que la réciproque de cette proposition est fausse, par exemple en prenant $f : x \longmapsto x^3$. Ainsi $f : (x, y) \longmapsto x^3$ est aussi un contre-exemple dans le cas des fonctions de deux variables.

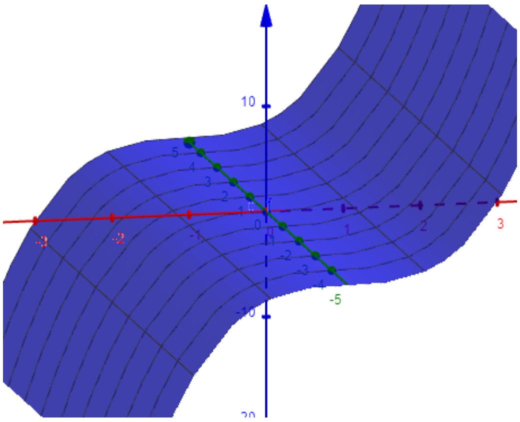


Figure 5 – Le point $(0, 0)$ est point critique mais pas extremum local de $f : (x, y) \longmapsto x^3$

2. Un autre contre-exemple reflète d'autres difficultés qui apparaissent pour les fonctions de deux variables. La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ admet $(0, 0)$ pour point critique, mais $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f. En effet, $(0, 0)$ est “minimal dans la direction x” et “maximal dans la direction y” , on parle de *point selle*.

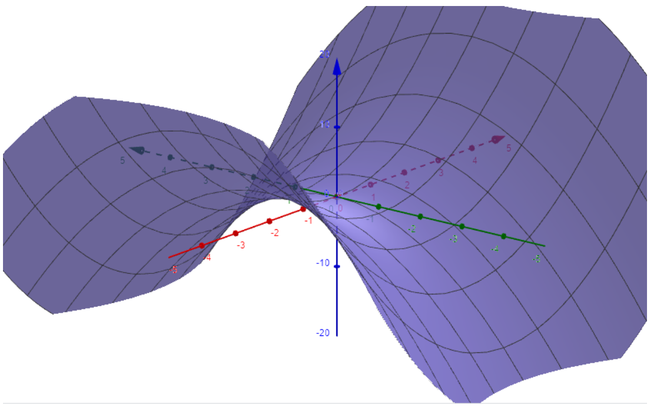


Figure 6 – Un point selle, animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/n9e7jnbq`

La stratégie pour déterminer les extremums locaux d'une fonction f de deux variables consiste donc à :

- Déterminer les points critiques en résolvant le système $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.
- Puis pour chacun de ces points critiques (x^*, y^*) étudier la quantité $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ pour déterminer si elle est ou non de signe constant. Lorsque c'est le cas (le plus souvent car un carré est apparu), on obtient un maximum si $f(x, y) - f(x^*, y^*) \geq 0$ et un minimum si $f(x, y) - f(x^*, y^*) \leq 0$. Cette deuxième étape, plus difficile, sera guidée la plupart du temps.

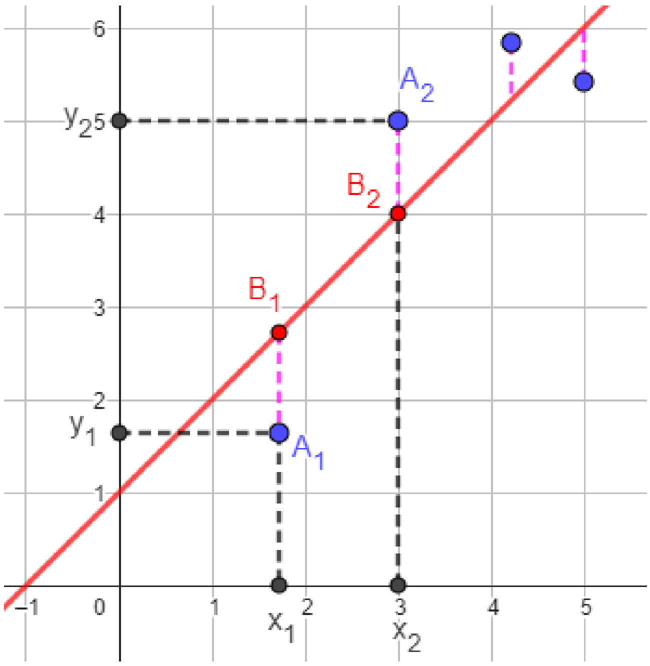
Exercice 6
Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et décider s'il s'agit ou non d'extremum globaux.

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto x^2 + 2y^2 - 2xy + 1$.
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.
3. $f_3 : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
4. $f_4 : (x, y) \longmapsto -3x^2 - 8y^2 - 10xy$.
   On s'intéressera à $f_4(x, -x)$ *et à* $f_4(x, -\dfrac{2}{3}x)$.

Exercice 7 (régression linéaire par méthode des moindres carrés)
Soient $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ des couples de valeurs mesurées lors d'une expérience visant à établir une corrélation affine entre la quantité y et la quantité x. On cherche des valeurs a et b telles que la droite d'équation $y = ax + b$ passe au plus près des points (x_i, y_i).

Notons, pour $i \in [\![1, n]\!]$, A_i le point de coordonnées (x_i, y_i) (points bleus sur la figure). Notons aussi B_i le point d'abscisse x_i et appartenant à la droite d'équation $y = ax + b$ (points rouges sur la figure).

La méthode des moindres carrés consiste à déterminer a et b minimisant la quantité $\sum_{i=1}^{n} (A_iB_i)^2$ (somme des distances violettes sur la figure).



1. Déterminer l'expression de $(A_iB_i)^2$ en fonction de a et b, puis donner l'expression de la quantité $\sum_{i=1}^{n} (A_iB_i)^2$ sous la forme $f(a, b)$.
2. Développez f pour l'écrire sous la forme
$$f(a, b) = \overline{x^2}\, a^2 + b^2 + 2\,\overline{x}\, ab - 2\,\overline{xy}\, a - 2\,\overline{y}\, b + \overline{y^2}$$
en précisant les valeurs des réels $\overline{x^2}, \overline{y^2}, \overline{x}, \overline{y}$ et $\overline{xy}$.

On *admet* que si $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$, alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire qu'il y a effectivement une droite passant au plus proche des points (x_i, y_i), on l'appelle *droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés.*

3. Déterminer les coefficients (a, b) correspondant à la droite de régression linéaire par la méthode des moindre carrés (on donnera l'expression de a, coefficient directeur de la droite, en fonction de $\overline{x^2}, \overline{y^2}, \overline{x}, \overline{y}$ et $\overline{xy}$; et on exprimera b en fonction de a).