Exercices supplémentaires

Exercice 1. Un industriel de l'agroalimentaire réalise deux types de purées :

- la purée A ("carottes-pommes de terre") qui nécessite 750 grammes de carottes et 250 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée,
- et la purée B ("pommes de terre-carottes") qui nécessite 250 grammes de carottes et 750 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée.

Il dispose en tout de 150 kilogrammes de pommes de terre et de 100 kilogrammes de carottes.
On note :

- x (respectivement y) la quantité de purée A (respectivement B) produite par l'industriel (en kg),
- c (respectivement p) la quantité totale de carottes (respectivement de pommes de terre) utilisée par l'industriel (en kg).

Dans tout l'exercice, on illustrera la situation par des dessins sur le schéma page 2*. Ces dessins sont dans le plan* (x, y) *c'est-à-dire que l'abscisse correspond à la quantité de purée A produite, et l'ordonnée à la quantité de purée* B*.*

1. (a) Exprimer c et p en fonction de x et de y.
   (b) Expliquer pourquoi x et y doivent satisfaire les inéquations suivantes :
$$(*) \ : \ \begin{cases} 0 \leq x \leq 600 - 3y \\ 0 \leq y \leq 400 - 3x \end{cases}$$
2. (a) Sur le schéma, tracer en bleu la droite Δ_1 d'équation $x = 600 - 3y$.
   (b) Tracer également en bleu la droite Δ_2 d'équation $y = 400 - 3x$. *On pourra trouver deux points appartenant à* Δ_2*.*
3. En annexe, hachurer en bleu la zone $(\mathcal{Z})$ du plan correspondant aux quantités de purées A et B réalisables par l'industriel, c'est-à-dire aux couples (x, y) satisfaisant les inéquations $(*)$.
4. Si le producteur choisit de ne faire qu'un seul type de purée A ou B, quelles quantités maximales $\overline{x}$, $\overline{y}$ peut-il fabriquer ? Indiquer sur le dessin précédent les points du plan correspondants.
5. Pour quelles valeurs de x et de y l'industriel utilise-t-il toute sa marchandise ? Placer le point $M(x, y)$ correspondant sur le dessin.

Une grande surface propose à l'industriel de lui acheter sa purée A à 3 euros le kg, et sa purée B à 2 euros le kg. En produisant x kg de purée A et y kg de purée B, l'industriel réalise donc un gain g donné en euros par $g = 3x + 2y$.
Pour $k \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_k passant par le point $B(k, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3, 2)$.

6. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in D_k$ si et seulement si le gain réalisé par l'industriel est égal à $g = 3k$.

7. Tracer sur le schéma le vecteur $50\,\vec{n} = (150, 100)$ en noir. Tracer ensuite en vert les droites D_k pour $k \in \{100, 150, 200\}$ en utilisant les points $B(k, 0)$.

8. L'industriel peut-il réaliser un gain de 600 euros ? *Une justification graphique sera suffisante.*

9. Quelles quantités x et y de purées doit-il produire pour maximiser son gain ? Quel est alors son gain maximal ? *Une justification graphique, à indiquer en rouge sur le schéma, sera suffisante.*

10. Si la grande surface achète la purée A à 4 euros le kg et la purée B à 1 euro le kg, l'industriel a-t-il intérêt à utiliser toute sa marchandise ?

11. De manière générale, pour quels prix d'achat au kg a et b des purées A et B l'industriel a-t-il intérêt à utiliser toute sa marchandise ?