Feuille de cours 25 :
introduction aux développements limités

1 Notation petit o

Rappel : Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0, on a, par définition :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x) \iff$$

Similairement, on introduit la notation $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(g(x))$ (lire “$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x tend vers 0) :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(g(x)) \iff$$

ainsi que l'écriture suivante :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} h(x) + o(g(x)) \iff$$

Exemples :

1. Montrer que $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

2. Montrer que $1 + 2x + x^3 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x^2)$.

3. A-t-on $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$? $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$?

Proposition 1
Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a : $x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^m) \iff$

Démonstration :

Interprétation : pour x proche de 0 on a : $1 >> x >> x^2 >> x^3 >> \dots$
Un “petit o de x^n” est une quantité négligeable devant x^n.

La notion de développement limité, permet donc de formaliser les raisonnements consistants à négliger une certaine quantité. Par exemple, si une quantité physique ε est très petite, on pourra négliger les termes en ε^2 face aux termes en ε pour écrire par exemple que $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2 \simeq 1+2\varepsilon$.
En mathématiques, nous écrirons plus volontiers que : $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 \underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 + 2\varepsilon + o(\varepsilon)$.
En effet, on a bien :

Exercice 1

1. Montrer que $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{1-2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.
3. Montrer que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. *On introduira la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

1. Que signifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$?
2. Si $a \in \mathbb{R}$, que signifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} a + o(1)$?
3. Si $\ell \in \mathbb{R}$, que signifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \ell x + o(x)$?
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + o(g(x))$.

2 Développement limité

2.1 Définition

L'écriture obtenue dans l'exercice 1 :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

s'appelle <u>le développement limité à l'ordre n en 0</u> de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Définition 2
Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (abrégé $DL_n(0)$) lorsqu'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Remarques :

- en d'autres termes f admet un $DL_n(0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$.
- Question : a-t-on $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$? Lorsqu'on fait un $DL_2(0)$ de f, doit-on écrire $f(x) \underset{x\to 0}{=} a + bx + o(x^2)$ ou $f(x) \underset{x\to 0}{=} a + bx + cx^2 + o(x^2)$?

Proposition 3 (formule de Taylor-Young)
Soit f une fonction de classe C^n au voisinage de 0. Alors f admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Interprétation : le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$ est la “meilleure” façon d'appocher $f(x)$ par un polynôme de degré n pour x proche de 0.

Dans le cas du $DL_1(0)$ on retrouve : $f(x) \underset{x\to 0}{=}$

2.2 Développements limités usuels en 0

Les développements limités suivants sont à connaître par cœur, ils sont à la base de tous les calculs de développements limités à savoir faire.

Proposition 4
On a les développements limités en 0 suivants, pour $n \in \mathbb{N}$:

1. $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
2. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
3. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
4. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
6. pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Remarque 5

1. Par exemple, la dernière formule avec $\alpha =$ donne : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=}$
2. Attention, dans cette dernière formule encore, α est une constante. Il ne faut en aucun cas utiliser cette formule pour obtenir un développement limité de $(1+x)^{\alpha(x)}$. Par exemple, pour $(1+x)^x$ il faudra au contraire écrire :

Démonstration :

1. Pour $x \neq 1$ on a $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{1-x}x^n$.
   Donc $\dfrac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'où le résultat.
2. On utilise la formule de Taylor-Young : exp est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$ donc $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$. Ainsi :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

3. à 6. On peut utiliser la formule de Taylor-Young : par exemple cos est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$, $\cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$, $\cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$, etc. En fait on peut montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } 4 \\ -1 & \text{si } k = 4p+2 \text{ pour un certain } p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

d'où le résultat en écrivant que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$.

Il est rare qu'on doive utiliser un développement limité d'une fonction usuelle à un ordre supérieur à 3 ou 4. Il faut donc bien connaître les résultats suivants :

Exercice 3
Donner les développements limités suivants :

1. $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$:

2. $DL_3(0)$ de e^x :

3. $DL_4(0)$ de $\cos(x)$:

4. $DL_4(0)$ de $\sin(x)$:

5. $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$:

Sauf exception, on n'utilise jamais la formule de Taylor-Young pour calculer un développement limité ! Déterminer les dérivées k-èmes d'une fonction peut en effet se révéler très compliqué !

En pratique, pour obtenir des développements limités, on combine ces formules entre elles grâce aux règles énoncées à la fin de ce document. Dans le reste de ce document on propose de découvrir ces règles à travers des exemples et des exercices.

3 Opérations : somme et produit

Exercice 4
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 3x + o(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} 4 + 5x + o(x).$$

En revenant à la définition, démontrer que $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} 6 + 8x + o(x)$.

Exercice 5
Donner les $DL_3(0)$ de e^x et $\sqrt{1+x}$. En déduire le $DL_3(0)$ de $3e^x - \sqrt{1+x}$.

Exercice 6
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} 4 + 5x + o(x).$$

Lesquelles des affirmations suivantes peut-on en déduire ? Justifier.

1. $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 6x + x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 6x + x^2 + o(x)$
3. $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 6x + o(x^2)$
4. $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 6x + o(x)$

Exercice 7
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que

$$f(x) = 2 + 3x + o(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3 - x + o(x).$$

On souhaite déterminer un développement limité de $f(x) \times g(x)$.

1. Justifier que $f(x) = 2+3x+x\varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. De même on écrit $g(x) = 3-x+x\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
2. Écrire alors $f(x) \times g(x)$ sous la forme $a + bx + x\varepsilon_3(x)$ avec $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et conclure.

Moralité : pour faire le développement limité à l'ordre n d'un produit, il suffit de développer les termes menant à des puissances inférieures ou égales à n.

Exercice 8

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.
2. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)\cos(x)$.
3. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto (e^x - 1)\sin(x)$.

Les exercices précédents illustrent en fait les propositions suivantes :

Proposition 6 (somme)
Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et soient P et Q deux polynômes.
Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$ alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :
$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda P(x) + \mu Q(x) + o(x^n)$

Proposition 7 (produit)
Soient f et g des fonctions définies au voisinage de 0 et soient P et Q deux polynômes.
Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$ et si $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$ alors $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} R(x) + o(x^n)$ où R est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit PQ.

4 Opérations : substitution

Exercice 9
On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrer que $f(\lambda x) \underset{x\to 0}{=} P(\lambda x) + o(x^n)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $f(x^p) \underset{x\to 0}{=} P(x^p) + o(x^{pn})$.

Exercice 10

1. Rappeler le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$. En déduire le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ et de $\dfrac{1}{1+2x}$.
2. À quel ordre a-t-on besoin d'écrire le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ pour obtenir le développement limité de $\dfrac{1}{1-x^2}$ à l'ordre 6 ? Le faire.
3. Déterminer le $DL_5(0)$ de $\ln(1-x^2)$ à partir d'un développement limité de $\ln(1+x)$.

Exercice 11
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. En utilisant un équivalent, montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
4. Écrire le $DL_2(0)$ de exp.
5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
6. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?