Feuille de cours 0.1 : logique élémentaire

1 Assertions et quantificateurs

1.1 Assertions

Définition 1
On appelle assertion ou proposition un énoncé auquel on peut attribuer une (et une seule) valeur de vérité, c'est-à-dire qui soit "Vrai" ou "Faux".

Pour parler d'une assertion quelconque, on utilisera les symboles $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \dots$

Exemple 1
- $\mathcal{P} =$ "$1 + 1 = 2$" est une assertion vraie.
- $\mathcal{Q} =$ "$2^2 > 5$" est une assertion fausse.
- $\mathcal{R} =$ "$5\ln(2) - 4$" n'est pas une assertion (elle "n'affirme" rien).
- $\mathcal{S} =$ "cette phrase est fausse" n'est pas une assertion (on ne peut pas lui attribuer de valeur de vérité).

Certaines assertions dépendent d'une ou de plusieurs variables. On notera par exemple $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable x ; $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$ une assertion dépendant de deux variables λ et μ, etc. Ces assertions sont alors vraies ou fausses *suivant la valeur prise par cette ou ces variable(s).*

Exemple 2
- Si n désigne un nombre entier, l'assertion $\mathcal{P}(n) =$ "n est pair" est vraie pour $n = 2$ et fausse pour $n = 3$.
- L'assertion $\mathcal{Q}(x) =$ "$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$" est vraie pour tout nombre réel x.
- $\mathcal{R}(x) =$ "$x^2 = 4$" est vraie pour
- $\mathcal{S}(\qquad) =$ "$f(3) = y$" est une assertion dépendant de
- $\mathcal{T}(\qquad) =$ "si on note $a = x + 1$ alors $a^2 = x^2 + 2x + 1$" est une assertion dépendant

Il est essentiel d'identifier de quelles variables dépendent les assertions que l'on écrit. Cela permet de s'assurer qu'il n'y a pas d'ambiguité sur le rôle de chacune d'elles pour le lecteur. Par exemple, lire dans une copie, en dehors de tout contexte, un calcul du type

$$f(x) = (x + 1)^4 = x^4 + 1$$

peut être ambigu : s'agit-il là d'une définition d'une fonction f ou celle-ci est-elle déjà définie par l'énoncé ? l'étudiant pense-t-il (à tort) que ce calcul est correct pour tout réel x ? l'étudiant est-il au contraire en train de mener un calcul pour un nombre x particulier qui rend cette égalité correcte ?

Pour résoudre ces questions, il faut connaître l'énoncé. On identifie alors deux types de variables :

- celles fixées par l'énoncé, par exemple lorsqu'il définit une fonction, pose une notation pour une constante, etc. Il n'est pas utile de repréciser ce que désignent ces variables ;
- celles introduites par l'élève, par exemple pour mener un calcul, pour utiliser un nouvel objet, etc. Ces variables doivent impérativement être **introduites** avant d'être utilisées, c'est-à-dire qu'il faut préciser le type d'objet qu'elles désignent (nombre réel, complexe, entier, fonction, matrice, etc) et le rôle qu'elles jouent (valeur particulière fixée, énoncé vrai pour toute valeur de cette variable, etc).

En un mot : toutes ces variables doivent être incluses dans le raisonnement présenté en réponse.

Exercice 1
Soit $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 3$.

1. On note $a = 1 + \sqrt{2}$. Démontrer que $f(a) = 4$.
2. Démontrer que f ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$ (on pourra penser à dériver [1]).

1. on rappelle qu'une fonction réelle dérivable sur un intervalle I est croissante sur I si et seulement si sa dérivée y est positive.

1.2 Quantificateurs : définitions

Bien souvent, on veut exprimer qu'une assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie **pour n'importe quelle valeur** d'une variable x dont elle dépend. On écrit par exemple : "pour tout nombre réel x, $(2x)^2 = 4x^2$".

Définition 2 (quantificateur universel)
Si $\mathcal{P}(x)$ désigne une assertion dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E, l'assertion suivante :

$$\text{“}\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)\text{”}$$

signifie "pour tout x appartenant à E, on a $\mathcal{P}(x)$".

À l'inverse, on peut vouloir dire que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie **pour au moins une valeur** de x. On écrit par exemple : "il existe (au moins) un nombre réel x tel que $x^2 = 1$".

Définition 3 (quantificateur existentiel)
Si $\mathcal{P}(x)$ désigne une assertion dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E, l'assertion suivante :

$$\text{“}\exists\ x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)\text{”}$$

signifie "il existe x appartenant à E tel qu'on a $\mathcal{P}(x)$".

Remarque 4

- les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés quantificateurs.
- les deux points après $\exists$ doivent être lus "tel que". D'autres symboles ($|$ ou / par exemple) sont également employés.
- en mathématique, l'expression "il existe un..." doit toujours être comprise au sens de "il existe au moins un...". Par exemple, puisque l'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions réelles ($\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$), il est vrai que "$\exists\ x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 = 2$".
Si l'on souhaite préciser que l'élément qui existe est unique, on dispose du quantificateur $\exists!$ signifiant "il existe un unique". Par exemple, l'assertion "$\exists!\ x \in \mathbb{R}^+\ :\ x^2 = 2$" est vraie.

Exercice 2
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 \geq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ : x \neq y$
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ :\ x = y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ :\ x^2 = y$

Exercice 3
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et M un nombre réel. Formez des assertions avec des quantificateurs traduisant les phrases suivantes.

1. "tous les éléments de E sont plus grand que M"
2. "la fonction f prend la valeur 2"
3. "toutes les valeurs prises par la suite (u_n) sont dans E"
4. "la fonction f admet un maximum en 3"
5. "la fonction f admet un maximum"
6. "la suite (u_n) ne prend que des valeurs paires"
7. "la fonction f ne prend jamais la valeur M"
8. "toutes les valeurs prises par la suite (u_n) sont aussi prises par la fonction f"

1.3 Quantificateurs : remarques

Remarque 5
De quelle(s) variable(s) dépend l'assertion "la fonction f admet un maximum" ?

Qu'en déduit-on quant au rôle d'une variable placée derrière un quantificateur ?

On dit que les variables derrière les quantificateurs sont **muettes**. On peut les remplacer par n'importe quel autre symbole sans changer le sens de la phrase (attention toutefois à ne pas utiliser un symbole déjà utilisé par ailleurs !).
Par exemple : "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$" et "$\forall\, y \in \mathbb{R},\ f(y) > 0$" signifient rigoureusement la même chose : f ne prend que des valeurs strictement positives. De même "$\exists\, x \in \mathbb{R}\ :\ \mathcal{P}(x)$" et "$\exists y \in \mathbb{R}\ :\ \mathcal{P}(y)$" signifient rigoureusement la même chose.

Remarque 6 (inversion des quantificateurs)
Traduire les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes en français. Sont-elles vraies ou fausses ? Qu'en déduit-on concernant l'inversion des quantificateurs ?

$$\mathcal{P} = \text{“}\exists\, x \in \mathbb{R} \ :\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y\text{”} \quad , \quad \mathcal{Q} = \text{“}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} \ :\ x \geq y\text{”}$$

Important : la variable introduite en deuxième dépend (a priori) de la variable introduite en premier. Ainsi dans l'assertion : “$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \ :\ f(x) = n$” (qui signifie “ ”), l'entier n dépend du réel x. En revanche dans l'assertion “$\exists\, n \in \mathbb{Z} \ :\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = n$” (qui signifie “ ”), l'entier n *ne dépend pas* du réel x.

Au contraire, deux quantificateurs de même nature (i.e. deux $\forall$ ou deux $\exists$) peuvent être échangés sans problème : par exemple “$\exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ \exists\, m \in \mathbb{Z} \ :\ n^2 + 2m^2 = 3$” a le même sens que “$\exists\, m \in \mathbb{Z} \ :\ \exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ n^2 + 2m^2 = 3$”.

Remarque 7
Attention, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ s'emploient uniquement dans un cadre *formel*, par exemple pour une définition précise d'une notion (voir par exemple la définition de la continuité) ou pour un résumé sous forme concise d'une proposition démontrée préalablement. **Il ne doivent pas être employés comme abréviations** au milieu d'un raisonnement en français !

2 Connecteurs logiques

Depuis deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on peut en construire d'autres via des connecteurs logiques.

2.1 Définitions

Définition 8
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On définit les assertions :

- NON($\mathcal{P}$) : la négation de $\mathcal{P}$. Elle est vraie quand $\mathcal{P}$ est fausse, et fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie.
- $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$: conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Elle est vraie lorsque les deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
- $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$: la disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Elle est vraie lorsqu' **au moins une** des deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie.
- $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$: cette implication est vraie lorsque : si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
- $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$: cette équivalence est vraie lorsque : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Remarque 9

- les symboles $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ sont aussi utilisées pour désigner respectivement les opérateurs NON, ET et OU .
- **Important :** le OU mathématique est **toujours inclusif**. Autrement dit, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies, alors $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ est vraie. Ainsi $(2+2=4)$ OU $(2+3=5)$ est vraie.
- on se convainc aisément que l'assertion $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ a toujours la même valeur de vérité que $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ ET $(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$. C'est le principe de double implication (voir feuille de cours 0.3). Lorsque $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ on dit que $\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$, ou qu'on a $\mathcal{P}$ si et seulement si on a $\mathcal{Q}$, ou encore que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{Q}$.
- L'implication $(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$ s'appelle l'implication réciproque de $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$.

Exercice 4
Si x désigne un nombre réel, simplifiez les assertions suivantes :

1. NON$(x > 1)$
2. $(x < 2)$ ET $(x \leq 1)$
3. $(x \geq 1)$ OU $(x > -1)$
4. $(x \geq 2)$ ET NON$(x \geq 5)$
5. $(x < 1)$ OU $(\ (x \geq -1)$ ET $(x \leq 2)\ )$

Exercice 5
Si x désigne un nombre réel, les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses [2] ?

1. $(x > 1) \implies (x \geq 4)$
2. $(x \leq 2) \implies (x > 4)$
3. $(x > 1) \implies (x > 2)$
4. $(x > 2) \implies (x > 1)$

Quelle remarque peut-on faire quant aux valeurs de vérité d'une implication et de son implication réciproque ?

Remarque 10
Attention, comme pour la remarque 7, les symboles $\implies$ et $\iff$ s'emploient uniquement dans un cadre *formel*. **Il ne doivent pas être employés comme abréviations** au milieu d'un raisonnement en français !

Plus particulièrement, **le symbole $\implies$ ne doit pas remplacer le mot de liaison "donc" dans le raisonnement**. En effet, il existe une subtile différence entre écrire "$(x > 2) \implies (x^2 > 4)$" et "on a $x > 2$ donc $x^2 > 4$" sur une copie. Écrire uniquement que l'implication "$(x > 2) \implies (x^2 > 4)$" est vraie ne permet en fait pas de conclure que $x^2 > 4$: il faut encore préciser qu'on a effectivement $x > 2$. Le raisonnement complet qu'il faudrait écrire si on voulait utiliser le symbole $\implies$ est le suivant : "l'implication "$(x > 2) \implies (x^2 > 4)$" est vraie ; or on a $x > 2$; donc on a $x^2 > 4$". En pratique, il est plus rapide de ne pas faire mention de l'implication formelle et d'écrire "on a $x > 2$ donc $x^2 > 4$".

La même remarque s'applique au symbole $\iff$. De plus, ce symbole ne doit pas être utilisé en lieu et place de "c'est-à-dire". En particulier, on ne reformule pas une définition à l'aide d'un symbole $\iff$. Il est bon de retenir que le symbole $\iff$ s'utilise presque exclusivement pour les **résolutions d'équations**.

2.2 Règles de calcul

Les propriétés suivantes se montrent facilement en énumérant toutes les valeurs de vérité possibles pour les assertions en jeu. S'il peut être utile de s'en convaincre à la main sur une ou deux propriétés à titre d'exercice, il est surtout important d'acquérir une familiarité avec ces règles logiques qui doivent vous sembler "naturelles".
On fera attention à utiliser des parenthèses lorsque celles-ci sont utiles pour lever toute ambiguité.

Proposition 11
Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois assertions. En utilisant le symbole " $=$" pour signifier que les assertions concernées ont toujours la même valeur de vérité, on a :

1. $\mathcal{P}$ ET ($\mathcal{Q}$ ET $\mathcal{R}$) = ($\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$) ET $\mathcal{R}$ = $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ ET $\mathcal{R}$ (associativité)
2. $\mathcal{P}$ OU ($\mathcal{Q}$ OU $\mathcal{R}$) = ($\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$) OU $\mathcal{R}$ = $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ OU $\mathcal{R}$ (associativité)

2. concernant la preuve ou la réfutation d'une implication, on renvoie à la feuille de cours 0.3

3. NON(NON($\mathcal{P}$)) = $\mathcal{P}$
4. $\mathcal{P}$ ET ($\mathcal{Q}$ OU $\mathcal{R}$) = ($\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$) OU ($\mathcal{P}$ ET $\mathcal{R}$) (distributivité)
5. $\mathcal{P}$ OU ($\mathcal{Q}$ ET $\mathcal{R}$) = ($\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$) ET ($\mathcal{P}$ OU $\mathcal{R}$) (distributivité)
6. NON($\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$) = NON($\mathcal{P}$) OU NON($\mathcal{Q}$) (loi de De Morgan)
7. NON($\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$) = NON($\mathcal{P}$) ET NON($\mathcal{Q}$) (loi de De Morgan)

Exemple 3
Vérifier la loi de distributivité sur les exemples suivants :

1. $(x < 1)$ OU ($(x \geq 2)$ ET $(x \leq 3)$)

2. $(x > 1)$ ET ($(x \leq 2)$ OU $(x \geq 3)$)

Exercice 6
Écrire la négation des phrases suivantes en utilisant les lois de De Morgan :

1. “Ce cours est long et difficile”

2. “L’entier n est divisible par 2 ou par 3”

On dispose enfin de deux règles concernant l'implication sur lesquelles nous reviendrons dans la feuille de cours 0.3 :

Proposition 12
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. En utilisant le symbole " =" pour signifier que les assertions concernées ont toujours la même valeur de vérité, on a :

1. $\text{NON}(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) = \Big[\mathcal{P} \text{ ET NON}(\mathcal{Q})\Big]$ (négation d'une implication)
2. $\Big[\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\Big] = \Big[\text{NON}(\mathcal{Q}) \Longrightarrow \text{NON}(\mathcal{P})\Big]$ (principe de contraposition).

Exemple 4
On considère l'implication suivante : "si un élève est bon en math alors il réussit le concours".

1. Que faut-il faire pour montrer que cette implication est fausse ?

2. Écrire la contraposée de cette implication.

Remarque 13
Ne pas confondre :

- la contraposée de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$: c'est et elle est logiquement équivalente à $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$,
- et la réciproque de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$: c'est et elle n'est (a priori) pas logiquement équivalente à $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$

2.3 Négation d'une assertion avec des quantificateurs

Proposition 14
Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E. En utilisant le symbole " =" pour signifier que les assertions concernées ont toujours la même valeur de vérité, on a :

1. $\text{NON}\Big(\forall\, x \in E,\ \mathcal{P}(x)\Big) = \exists\, x \in E\ :\ \text{NON}(\mathcal{P}(x))$;
2. $\text{NON}\Big(\exists\, x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)\Big) = \forall\, x \in E,\ \text{NON}(\mathcal{P}(x))$.

Il est à nouveau important de bien comprendre ces règles de calcul naturelles en français.
Nier le fait que $\mathcal{P}(x)$ soit vrai pour tout x de E, c'est affirmer que $\mathcal{P}(x)$ est faux pour au moins un x de E. En d'autres termes, c'est dire qu'il existe un x de E tel que $\text{NON}(\mathcal{P}(x))$ soit vrai.
De même, nier le fait qu'il existe un x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vrai, c'est affirmer que $\mathcal{P}(x)$ est faux pour tout x de E. En d'autres termes, c'est dire que pour tout x de E, $\text{NON}(\mathcal{P}(x))$ est vrai.

Toutes ensemble, les règles des propositions 11, 12 et 14, permettent d'écrire la négation de toute assertion logique.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Donner les négations des assertions suivantes.

1. $\exists\, M \in \mathbb{R} \ :\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Big((x > 0) \text{ OU } (f(x) \geq 0)\Big)$.

3. $\Big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0\Big) \text{ ET } \Big(\exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ u_n > 1\Big)$

4. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \geq N,\ |u_n| \leq \varepsilon$.

5. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, M \in \mathbb{R} \ :\ u_n \leq M$.

Attention, il ne faut pas confondre les deux assertions $\mathcal{Q}_1 = \Big[\forall x \in E,\ \text{NON}(\mathcal{P}(x))\Big]$ et $\mathcal{Q}_2 = \Big[\text{NON}(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x))\Big]$.
Prenons par exemple l'assertion $\mathcal{P}(x) =$ "$x^2 > 1$" et $E = \mathbb{R}$. On a alors :

- $\mathcal{Q}_1 = \Big[\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{NON}(x^2 > 1)\Big] =$

- tandis que $\mathcal{Q}_2 = \text{NON}\Big[\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 1)\Big] =$

Exercice 8
Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs puis écrire leur négation.

1. Tous les nombres réels sont supérieurs à leur carré.
2. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
3. Certains nombres réels sont positifs.
4. Tous les nombres réels supérieurs à 2 sont supérieurs à 3.

Exercice 9
Expliquer pourquoi les rédactions suivantes sont incorrectes et proposer une correction.

1. Soit $f : x \longmapsto x^2 + x + 1$. Alors la dérivée de f est $f'(x) = 2x + 1$.
2. L'entier n proposé par l'énoncé est pair donc $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 \times (2m^2)$ donc n^2 est aussi pair.
3. On a $u_{n+1} = 2u_n$ donc $u_n = 2^n u_0$.