Rentrée 2024-2025

BCPST 1B Marcelin Berthelot

M. Caillaud, mathématiques et informatique
corentin.caillaud@ens-rennes.fr

Rentrée 2024-2025

BCPST 1B Marcelin Berthelot

M. Caillaud, mathématiques et informatique
corentin.caillaud@ens-rennes.fr

1. Appel inversé
2. Attendus en math dans le supérieur
3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B
4. Évaluations

Nom, Initiale, Prénom

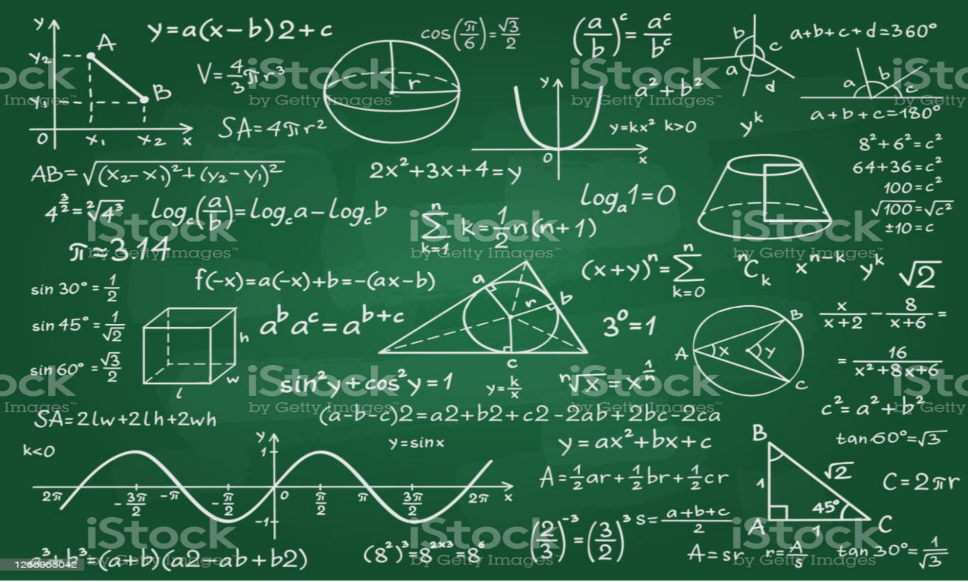
J'ai passé mon grand oral sur...

Nom, Initiale, Prénom

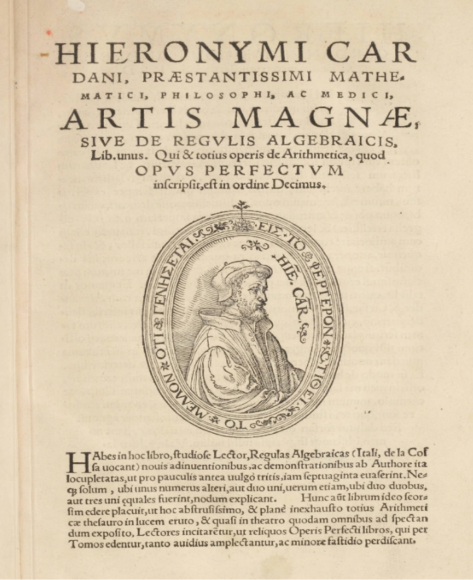
J'ai passé mon grand oral sur...

Caillaud, C, Corentin

~~J'ai passé mon grand oral sur...~~ J'ai fait ma thèse sur de l'optimisation mathématique i.e. la recherche de minimum / maximum de fonctions.

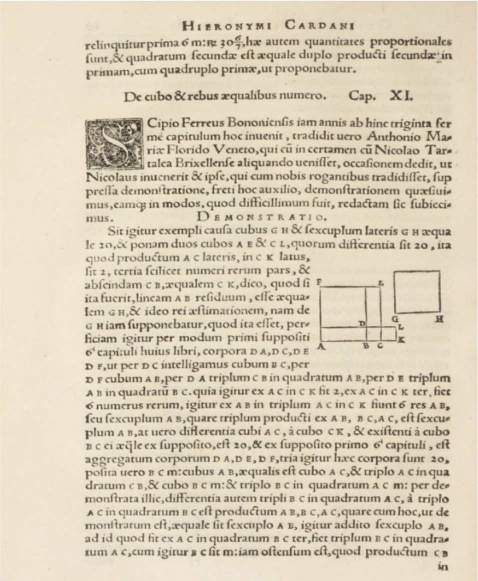


Une image obtenue en recherchant “maths” dans Google



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.



HIERONYMI CARDANI

relinquitur prima 6 m: ℞ 30 6/7, hæ autem quantitates proportionales ſunt, & quadratum ſecundæ eſt æquale duplo producti ſecundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

SCipio Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cū in certamen cū Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando ueniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus, eamq; in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiecimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus G H & ſexcuplum lateris G H æquale 20, & ponam duos cubos A E & C L, quorum differentia ſit 20, ita quod productum A C lateris, in C K latus, ſit 2, tertia ſcilicet numeri rerum pars, & abſcindam C B, æqualem C K, dico, quod ſi ita fuerit, lineam A B reſiduum, eſſe æqualem G H, & ideo rei æſtimationem, nam de G H iam ſupponebatur, quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti 6ᵗⁱ capituli huius libri, corpora D A, D C, D E D F, ut per D C intelligamus cubum B C, per D F cubum A B, per D A triplum C B in quadratum A B, per D E triplum A B in quadratū B C. quia igitur ex A C in C K fit 2, ex A C in C K ter, fiet 6 numerus rerum, igitur ex A B in triplum A C in C K fiunt 6 res A B, ſeu ſexcuplum A B, quare triplum producti ex A B, B C, A C, eſt ſexcuplum A B, at uero differentia cubi A C, à cubo C K, & exiſtenti à cubo B C ei æq̄le ex ſuppoſito, eſt 20, & ex ſuppoſito primo 6ᵗⁱ capituli, eſt aggregatum corporum D A, D E, D F, tria igitur hæc corpora ſunt 20, poſita uero B C m: cubus A B, æqualis eſt cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: per demonſtrata illic, differentia autem tripli B C in quadratum A C, à triplo A C in quadratum B C eſt productum A B, B C, A C, quare cum hoc, ut demonſtratum eſt, æquale ſit ſexcuplo A B, igitur addito ſexcuplo A B, ad id quod fit ex A C in quadratum B C ter, fiet triplum B C in quadratum A C, cum igitur B C ſit m: iam oſtenſum eſt, quod productum C B in

Un extrait de *Ars Magna* de Cardan, XVIème siècle

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entr'eux.

Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. 4) dont les deux côtés AB, AC sont égaux aux deux côtés DE, DF chacun à chacun, c'est-à-dire, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF; que l'angle BAC soit aussi égal à l'angle EDF : je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF, et que les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux chacun à chacun; l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point B tombera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE : mais la droite AB s'appliquant exactement sur la droite DE, la droite AC s'appliquera de même exactement sur la droite DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF; le point C tombera sur le point F, parce que la ligne AC est égale à la ligne DF; mais le point B tombe sur le point E : donc la base BC est égale à la base EF, car si le point B tombant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BC ne s'applique pas exactement sur la base EF, il faut nécessairement que deux lignes droites comprennent un espace, ce qui est impossible (axiome 12); donc la base BC s'appliquera exactement sur la base EF, et lui sera égale; donc aussi le triangle entier ABC s'appliquera exactement sur le triangle entier DEF et lui sera égale. Par conséquent les autres angles de l'un des triangles s'appliqueront exactement sur les autres angles de l'autre triangle et seront par conséquent égaux aussi entr'eux; c'est-à-dire l'angle ABC égal l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Donc si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux des deux triangles seront aussi égaux entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Dans les triangles isocèles les angles placés sur la base sont égaux entr'eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles placés au-dessous de la base seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle isocèle ABC (fig. 5) dont le côté AB est égal au côté AC; prolongez les droites AB, AC, vers D et vers E (dem. 2) : je dis que l'angle ABC est égal à l'angle ACB et que l'angle CBD est encore égal à l'angle BCE.

Car prenons sur la droite BD un point quelconque F, et de la droite AE retranchons la droite AG égale à la droite AF, qui est plus petite que la droite AE (prop. 3), et conduisons les droites FC et GB.

Puisque la droite AF est égale à la droite AG et la droite AB à la droite AC, les deux droites FA, CA seront égales aux deux droites GA, BA chacune à chacune; mais ces droites compren-

Une traduction des *Elements* d'Euclide, XIXème siècle

Torsion invariants of complexes of groups

Boris Okun Kevin Schreve

August 23, 2021

Abstract

Suppose a residually finite group G acts cocompactly on a contractible complex with strict fundamental domain Q, where the stabilizers are either trivial or have normal $\mathbb{Z}$-subgroups. Let ∂Q be the subcomplex of Q with nontrivial stabilizers. Our main result is a computation of the homology torsion growth of a chain of finite index normal subgroups of G. We show that independent of the chain, the normalized torsion limits to the torsion of ∂Q, shifted a degree. Under milder assumptions of acyclicity of nontrivial stabilizers, we show similar formulas for the mod p-homology growth. We also obtain formulas for the universal and the usual L^2-torsion of G in terms of the torsion of stabilizers and topology of ∂Q. In particular, we get complete answers for right-angled Artin groups, which shows they satisfy a torsion analogue of Lück approximation theorem.

1 Introduction

Let G be a residually finite group of type F, and let $\{\Gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ be a nested chain of finite index, normal subgroups of G with $\bigcap_k \Gamma_k = 1$. In this paper, we are interested in the normalized growth of the invariants:

$$\limsup_k \frac{b_i(B\Gamma_k;\mathbb{Q})}{[G:\Gamma_k]}, \quad \limsup_k \frac{b_i(B\Gamma_k;\mathbb{F}_p)}{[G:\Gamma_k]}, \quad \limsup_k \frac{\log(|H_i(\Gamma_k;\mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}|)}{[G:\Gamma_k]}.$$

These will be denoted by $b_i^{(2)}(G,\mathbb{Q}), b_i^{(2)}(G,\mathbb{F}_p)$ and $t_i^{(2)}(G)$ respectively. By Lück's approximation theorem, the first quantity coincides with the i^{th} L^2-Betti number of G [25]. We will call the second quantity the i^{th} $\mathbb{F}_p$-L^2-Betti number of G, and the third the i^{th} *torsion growth* of G. The first quantity is an honest limit and does not depend on the choice of

Theorem 1.1. *Let G be a residually finite group which acts cocompactly on a contractible complex with strict fundamental domain Q. Suppose the stabilizer of any cell fixes it, and that each nontrivial stabilizer has a normal, infinite cyclic subgroup with type F quotient. Let ∂Q be the subcomplex of Q with nontrivial stabilizers. Then*

$$t_i^{(2)}(G) = \log|H_{i-1}(\partial Q)_{\mathrm{tor}}|.$$

As with the computation in [3], the lim sup is an honest limit and is independent of the chain. Our main class of groups which satisfy the assumptions in Theorem 1.1 are residually finite Artin groups which satisfy the $K(\pi,1)$-conjecture. Such Artin groups act on a contractible complex called the Deligne complex [7, Section 1.5] with strict fundamental domain isomorphic to the cone on the nerve L of the Artin group A. The stabilizers of simplices are either trivial or isomorphic to spherical Artin groups, which have normal infinite cyclic subgroups. The simplices in L correspond to simplices in the Deligne complex with nontrivial stabilizer. Therefore, we have that $t_i^{(2)}(A) = \log|H_{i-1}(L)_{\mathrm{tor}}|$. A general construction of actions with strict fundamental domain comes from simple complexes of groups, as in [4, Chapter II.12].

Our proof of Theorem 1.1 uses the recent work of Abert, Bergeron, Fraczyk, and Gaboriau in [1]. They developed a general strategy for showing the vanishing of $t_i^{(2)}(G)$ for groups which act on contractible complexes with "cheap" infinite stabilizers. Here, "cheap" roughly means that finite index subgroups admit classifying spaces with sublinear (in the index) number of cells and subexponential norm of boundary maps, see Section 10 of [1]. By using an effective version of Geoghegan's rebuilding procedure for the Borel construction [15, Section 6.1], they build classifying spaces for finite index subgroups of G by gluing together these nice classifying spaces of the stabilizers, and show the resulting spaces have subexponential torsion growth. In Section 2, we describe an alternative approach to this effective rebuilding procedure using iterated mapping cylinders, which we find simpler. Amongst other examples, they showed the vanishing of $t_i^{(2)}(A)$ for Artin groups with $(i-1)$-connected nerve. A new feature in this paper is an exact calculation of nonvanishing torsion growth.

Our argument has two parts. The first part is handled by the method in [1]. Given a group G as in Theorem 1.1, we construct a classifying space BG built out of classifying spaces of the stabilizers BG^σ. There is a subcomplex Y which is built from BG^σ for σ in ∂Q, and $BG = Q \cup_{\partial Q} Y$. Since groups with normal infinite cyclic subgroups and type F quotient are cheap, the lifts Y_k of Y to the finite cover $B\Gamma_k$ have subexponential torsion growth.

Un article de mathématiques de 2021

Lemma 2.3. *There is a constant $C = C(M, n)$ such that if*

$$\|g_i\|, \|g_i'\|, \|\gamma_i\|, \|\partial_{F_i'}\| < K,$$

and $K > 2$ then

$$\|H\|, \|H'\|, \|\Sigma\|, \|\partial_{X'}\| < CK^C.$$

Now let $\widehat{X} \to X$ be a cover of X. The cylindrical filtration on X induces a natural cylindrical filtration on $\widehat{X}$, where $(\widehat{F}_i, \widehat{E}_i)$ is the preimage of the pair (F_i, E_i), and $\widehat{f}_i$ is the lift of f_i.

Lemma 2.4. *The norm of $\widehat{f}_i$ is uniformly bounded, independent of the cover.*

Proof. On the level of the universal cover the attaching map is described by a matrix with $\mathbb{Z}\pi_1$ coefficients. The uniform bound for $\|\widehat{f}_i\|$ in terms of this matrix is given by [25, Lemma 2.5]. □

To summarize, given a cylindrical filtration on X, the norm of the rebuilt maps of any rebuilding of a finite cover of X is bounded by a fixed polynomial of the maximal norm of the rebuilding maps.

Any filtration of X by subcomplexes leads to a cylindrical filtration by taking pairs (F_i, E_i) to be $(X_i - N(X_{i-1}), \partial N(X_{i-1}))$, where $N(X_{i-1})$ is a regular neighborhood of X_{i-1} in X_i. A particularly easy case is a filtration of X by its skeleta $X^{(i)}$, then we can take (F_i, E_i) to be $\sqcup(\sigma^i, \partial\sigma^i)$ with the standard attaching maps.

This generalizes, up to homotopy, to complexes which are filtered as iterated adjunction spaces. It is easy to change such filtration into a cylindrical filtration and keep the same pairs (F, E) at the cost of changing the attaching maps.

The maps $g|_E \times \mathrm{id} : E \times I \to E' \times I$, $g : F \to F'$, and $h : X \to X'$ induce a map between mapping cylinders:

$$g \cup h : F \cup_E M(fg'g) \to F' \cup_{E'} M(f')$$

By [15, Theorem 4.1.5], $g \cup h$ is a homotopy equivalence. Since $g'g$ is homotopic to the identity via γ, $F \cup_E M(f)$ is homotopy equivalent to $F \cup_E M(fg'g)$. The homotopy equivalence

$$\Phi : F \cup_E M(f) \to F \cup_E M(fg'g)$$

is given by

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} (x, 2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ f(\gamma(x, 2(1-t))) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

on the $E \times I$, and the identity maps on F and X.

The composition of these homotopy equivalences gives a homotopy equivalence

$$H : F \cup_E M(f) \xrightarrow{\Phi} F \cup_E M(fg'g) \xrightarrow{g \cup h} F' \cup_{E'} M(f').$$

To estimate its norm, we use splittings of the chain complexes of $F' \cup_{E'} M(f')$ and $F \cup_E M(fg'g)$, similar to Lemma 2.1. The map on chains induced by $g \cup h$ is block diagonal $g \cup h = g \oplus g_E \oplus h$. The matrix of Φ has block form:

$$\begin{pmatrix} id & 0 & 0 \\ 0 & id & 0 \\ 0 & -f\gamma & id \end{pmatrix}$$

Thus, $H = (g \cup h)\Phi$ has matrix:

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g_E & 0 \\ 0 & -hf\gamma & h \end{pmatrix}$$

and the claim follows.

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- *Modéliser, représenter*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- *Modéliser, représenter*
- *Raisonner et argumenter*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- *Modéliser, représenter*
- *Raisonner et argumenter*
- *Communiquer à l'écrit et à l'oral*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- *Modéliser, représenter*
- *Raisonner et argumenter*
- *Communiquer à l'écrit et à l'oral*
- *Calculer, manipuler des symboles et maîtriser le formalisme mathématique*

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle...
mais :

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle... mais :

- maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle... mais :

- maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul
- pour faire le lien avec le lycée, certains “exercices types” à savoir refaire

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle... mais :

- maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul
- pour faire le lien avec le lycée, certains “exercices types” à savoir refaire

maîtrise du cours > refaire des exos de TD

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir
- je note les points qui me posent problème pour pouvoir poser la question au cours suivant

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir
- je note les points qui me posent problème pour pouvoir poser la question au cours suivant
- je travaille en groupe

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi

3.2. En classe :

- je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- en TD, je travaille en groupe

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- en TD, je travaille en groupe
- j'ai une feuille de brouillon pour les "pauses exos" du cours, ou pour noter des questions à poser

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- en TD, je travaille en groupe
- j'ai une feuille de brouillon pour les "pauses exos" du cours, ou pour noter des questions à poser

je suis ACTIF en cours : je participe à l'oral, je comprends "en live" ou alors je pose une question. Élèves impliqués en cours = réussite du groupe !

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

- Se procurer un cahier de colles et questions de cours (*cf* feuille de consignes Cahier)
  Cahier format A5, 48 pages, couverture solide, avant lundi 09/09/24

3.3. Matériel :

- Se procurer un cahier de colles et questions de cours (*cf* feuille de consignes Cahier)
  Cahier format A5, 48 pages, couverture solide, avant lundi 09/09/24
- Reste du matériel libre. Séparez impérativement cours et TD. Privilégiez un cahier si vous êtes peu organisé.

4. Évaluations

4. Évaluations

- DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h

4. Évaluations

- DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**

4. Évaluations

- DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- Colles toutes les 2 semaines (à partir du 16/09/24)

4. Évaluations

- DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- Colles toutes les 2 semaines (à partir du 16/09/24)
- DM et exercices en temps libre (ne compte pas dans la moyenne)

4. Évaluations

- DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- Colles toutes les 2 semaines (à partir du 16/09/24)
- DM et exercices en temps libre (ne compte pas dans la moyenne)
- Points bonus de participation, de retours de colle, de préparation des interros, etc. Par séquences, précisions à venir.