Feuille de cours 1 : trinômes du second degré

Dans ce document, on étudie les solutions des équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et où x est une inconnue *réelle*.

On commence par deux cas particuliers simples, qu'il faut résoudre **sans passer par la technique plus générale** que nous verrons ensuite :

Proposition 1
Soit $r \in \mathbb{R}$. Les solutions réelles de l'équation $x^2 = r$ sont données par :

- si $r > 0$: $x^2 = r \iff$
- si $r = 0$: $x^2 = 0 \iff$
- si $r < 0$: alors l'équation $x^2 = r$ n'a pas de solution réelle.

Proposition 2
Soit $p \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation $x^2 + px = 0$ sont données par :

$$x^2 + px = 0 \iff$$

On étudie maintenant le cas général :

Définition 3
On appelle trinôme du second degré une fonction polynôme P de degré 2 donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,x^2 + bx + c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On notera aussi : $P = P(X) = aX^2 + bX + c$ pour désigner le polynôme (ou fonction polynomiale) P.
On appelle racines de P les solutions de l'équation $P(x) = 0$. On appelle coefficient dominant de P le réel a.

Définition 4 (discriminant)
On appelle discriminant de P le réel $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Remarque 5
Attention : même si la lettre Δ est usuelle pour désigner le discriminant, lorsque vous rédigez vous devez tout de même expliquer qu'il s'agit du discriminant que vous êtes en train de calculer. Par ailleurs, il est hors de question de faire figurer sur votre copie la formule $b^2 - 4ac$ si les lettres a, b et c n'ont pas été introduites (ou pire : si elles ont été introduites mais pour désigner autre chose que les coefficients du trinôme). Ainsi, si l'énoncé donne $P(x) = 2x^2 - x + 3$, on n'écrira pas

$$\textit{On calcule } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23$$

mais plutôt

$$\textit{Le discriminant de } P \textit{ est } \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23$$

Proposition 6 (Factorisation d'un trinôme du second degré)
Le signe du discriminant détermine le nombre de racines de P et sa factorisation :

- Si $\underline{\Delta > 0}$, P a deux racines réelles : $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,.$$
Dans ce cas, P est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé de a à l'intérieur des racines :
  - $*$ Pour tout $x \in]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$, $P(x)$ et a ont même signe.
  - $*$ Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $P(x)$ et $-a$ ont même signe.
- Si $\underline{\Delta = 0}$, P a une unique racine réelle : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,(x-\alpha)^2\,.$$
Dans ce cas, P est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\underline{\Delta < 0}$, P n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, P est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7
Ne pas oublier le coefficient dominant a !

<u>Démonstration :</u> On écrit P sous forme *canonique* :

$$P(x) = a\,x^2 + bx + c \overset{a\neq 0}{=} a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x}_{\text{forme canonique}} \quad + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(\qquad\qquad \right)^2 - \qquad\quad + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(\qquad\quad \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]\,.$$

- Si $\underline{\Delta < 0}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, et on conclut.
- Si $\underline{\Delta = 0}$, $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, et on conclut.
- Si $\underline{\Delta > 0}$, on reconnaît une égalité remarquable :
$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
On conclut par un tableau de signes : notant $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ de sorte[1] qu'on a :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-\beta$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

$\square$

1. Pour construire ce tableau de signes, on a en fait supposé que $\alpha < \beta$ ce qui revient à dire que $a > 0$. Le cas $a < 0$ est similaire.

Exercice 1

Écrire les polynômes suivants sous forme factorisée.

1. $P_1(X) = X^2 + X - 6$
2. $P_2(X) = -X^2 + \dfrac{4}{3}X - \dfrac{4}{9}$
3. $P_3(X) = -X^2 + 5$
4. $P_4(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{4}X - \dfrac{3}{4}$

Exercice 2
Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $x^2 - x = 3x - 3$
2. $x^2 + x = \frac{1}{2}x$
3. $x^2 + 3x + 4 = 0$
4. $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Proposition 8 (Représentation graphique)
La courbe représentative de P est une parabole. Compte tenu du signe de P explicité dans la proposition précédente, son allure dépend du signe du coefficient dominant a et de la valeur du discriminant Δ :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

De plus, si $a > 0$ (resp. si $a < 0$) le minimum (resp. le maximum) de P est atteint en $x =$; et l'ordonnée à l'origine $x = 0$ vaut .

Remarque 9
Attention, lorsqu'on résout une *inéquation* avec un trinôme, calculer les racines du polynôme ne suffit pas à conclure : il faut aussi mentionner le signe du coefficient dominant.

Exercice 3
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $2x^2 - 8x - \dfrac{9}{2} > 0$

2. $-3x^2 + 2x + 1 > 0$
3. $\dfrac{x^2}{2} - x + 4 < 0$
4. $x^2 - x + \dfrac{1}{4} \geq 0$
5. $-x^2 + x - 1 \leq 0$

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$
2. $(x - \sqrt{2})^2 - 1 = 0$
3. $\dfrac{1}{x} + x - 2 = 0$
4. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
5. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$