Feuille de cours 0.2 : récurrences et premières sommes

Introduction

Sur une île au climat capricieux, les propriétés suivantes sont vraies :

- Il pleut le 16 septembre 2024.
- S'il pleut un jour, il pleut aussi le lendemain.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 1
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : "$2^n \geq n+1$".

1. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie ?
2. Écrire la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
3. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.
4. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{P}(1)$? sur $\mathcal{P}(2)$? de manière générale ?

1 Récurrence simple

1.1 Principe

Le principe de récurrence est une méthode permettant de démontrer un énoncé pour tout entier naturel, c'est-à-dire pour prouver un résultat du type : $(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n))$ où $\mathcal{P}(n)$ désigne une propriété qui dépend de n, comme par exemple : $2^n \geq n+1$.

Remarque 1
L'énoncé à prouver peut aussi porter sur tous les entiers supérieurs à un certain $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n)$.

Remarque 2
Il est donc inutile de se lancer dans une preuve par récurrence pour montrer un résultat ne faisant pas intervenir d'entiers, comme un énoncé du type $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{P}(x)$.

Proposition 3 (récurrence simple)
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a : $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 4
La démonstration de cette propriété repose en fait sur la définition des entiers naturels $\mathbb{N}$, par exemple à travers l'axiome suivant (un des "axiomes de Péano") : si $E \subset \mathbb{N}$ est tel que $0 \in E$, et $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$, alors $E = \mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence donné ci-dessus correspond à cet axiome appliqué à l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{P}(n+n_0) \text{ est vraie}\}$.

Remarque 5
Un raisonnement par récurrence comporte donc deux étapes :

- l'initialisation : c'est la partie où l'on prouve que la propriété est vraie **pour le plus petit** des entiers pour laquelle on veut la prouver ;
- l'hérédité : c'est la partie où l'on prouve que **si** la propriété est vraie pour un entier n **quelconque** (parmi ceux pour lequels on veut la démontrer) **alors** elle est vraie pour l'entier $n+1$.

Exercice 2
Expliquez ce qu'il faut faire pour montrer par récurrence que : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq 4n$. On ne demande pas de faire la preuve, mais seulement d'identifier ce qu'il faut montrer.

1.2 Rédaction d'une récurrence simple

Pour être correcte, la rédaction d'une récurrence doit faire apparaître clairement chacun des points suivants :

1. L'annonce du raisonnement qui va suivre, qui doit préciser :
   - le fait qu'on va travailler par *récurrence* (le mot doit être dit),
   - l'identification de la propriété $\mathcal{P}(n)$,
   - l'ensemble d'entiers pour lequel on va prouver la propriété.
2. L'étape d'initialisation où on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (il s'agit généralement d'une vérification facile).
3. L'étape d'hérédité où on montre que pour $n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Cette étape doit préciser :
   - qu'on fixe un $n \geq n_0$ (c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}$, si $n_0 = 0$),
   - qu'on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,
   - puis montrer que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.
4. Une conclusion, indiquant que la preuve se termine ici.

Par exemple, la trame suivante contient tous les points demandés :
Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n)$.
Tout d'abord, $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie puisque ....
Ensuite, soit $n \geq n_0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie (*). Alors on en déduit que ...,
et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Finalement, cela prouve par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 6
La phrase signalée par *(*)* : "*soit $n \geq n_0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie*" a le même sens que : "*supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie* ***pour un certain entier*** $n \geq n_0$". On peut donc utiliser (entre autres) ces deux formulations.

Exercice 3
Démontrer que : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq 4n$.

Attention, aux erreurs classiques suivantes :

- L'étaoe d'initialisation consiste souvent en une simple vérification. Il faut pourtant bien *démontrer* que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et pas seulement "recopier bêtement" $\mathcal{P}(n_0)$.
- L'étape d'hérédité constitue le cœur de la preuve. À nouveau, il faut *démontrer* que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Se contenter d'écrire "si on a $\mathcal{P}(n)$ alors on a nécessairement $\mathcal{P}(n+1)$" sans donner d'argument n'est pas satisfaisant. En particulier on doit obtenir $\mathcal{P}(n+1)$ **en utilisant** $\mathcal{P}(n)$. On dit que $\mathcal{P}(n)$ est l'hypothèse de récurrence. Si vous n'utilisez pas $\mathcal{P}(n)$ pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$ alors c'est que vous n'avez pas besoin de raisonner par récurrence.
- L'hypothèse de récurrence consiste à supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour un certain** n, et non pas pour tout n ! Ainsi l'hyporthèse de récurrence *n'est pas* : "$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$", mais bien : "supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $\mathcal{P}(n)$".
- L'hérédité consiste à prouver une implication seulement. Inutile donc de raisonner par équivalence pour montrer que $\mathcal{P}(n) \iff \mathcal{P}(n+1)$. Par ailleurs, on attend un raisonnement en français donc :

1.3 Comment obtenir l'hérédité ?

On l'a dit : l'initialisation est une vérification souvent simple. L'hérédité en revanche nécessite de savoir **passer du rang** n **au rang** $n+1$. Afin d'y arriver, voici quelques conseils :

- Écrivez au brouillon votre point de départ $\mathcal{P}(n)$ et votre point d'arrivée $\mathcal{P}(n+1)$. Gardez toujours en tête que vous cherchez à démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de $\mathcal{P}(n)$ (et éventuellement en utilisant aussi que $n \geq n_0$).
- Utilisez les relations permettant de passer du rang n au rang $n+1$. Un exemple typique : $x^{n+1} = x^n \times x$. Un autre exemple est celui des suites définies par récurrence : si u_{n+1} est défini en fonction de u_n alors il faut utiliser cette relation. Enfin pour les sommes (voir infra) : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=p}^{n} x_k$.

1.4 Exemples

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n}$.

1.5 Entraînement

Exercice 6
Montrer que pour tout $n \geq 6,\ 2^n \geq 6n + 7$.

Exercice 7
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2}$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$.

Exercice 8
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 9
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2n+3}{2}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^n} - 2n + 1$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Premières sommes

Pour plus de généralité, les résultats de cette partie sont énoncés pour des nombres et des suites complexes (de $\mathbb{C}$). Ils sont donc en particulier vrais pour des nombres et des suites réels (de $\mathbb{R}$). Vous pouvez donc les apprendre dans un premier temps en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 10
Une légende urbaine raconte l'histoire suivante. Dans les années 1780, un instituteur allemand souhaitant obtenir le silence dans sa classe pendant une bonne demi-heure demanda à ses élèves de calculer la somme de tous les nombres entiers de 1 à 100 : $1+2+3+\cdots+100$. Il ignorait qu'il comptait parmi ses élèves le jeune Karl Friedrich Gauss (1777-1855) dont la page Wikipédia indique aujourd'hui “Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.”. Presque immédiatement, celui-ci donna la bonne réponse...

En fait, il existe une formule. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $s_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$. Démontrez par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et retrouvez la bonne réponse donnée par Gauss.

Définition 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles par :

- $s_0 = u_0$, et
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$

On a donc l'identité et la notation suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

On peut aussi considérer des sommes entre deux indices p et n tels que $p \leq n$:

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n}$$

Remarque 8
L'indice k apparaissant dans la somme est *muet*, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par ce qu'on veut (sauf par une lettre déjà prise pour autre chose !) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_j$.

Attention, $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} u_n$ n'a pas de sens !

Exercice 11
Traduire l'égalité de l'exercice 10 à l'aide du symbole $\sum$:

Proposition 9 (somme d'une constante)
Lorsque la quantité sommée est constante, le résultat dépend uniquement du nombre de termes : pour tout $a \in \mathbb{C}$, et pour tous entiers $p \leq n$:

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} a = a \times (\text{nombre de termes}) = a \times (n - p + 1)}$$

Exercice 12
Tous les matins du lundi 13 septembre au samedi 18 septembre inclus, j'achète un croissant à 1,20 euros. Combien ai-je dépensé en tout ?

Proposition 10 (linéarité de la somme)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un scalaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exercice 13

Calculer $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$. Quelle réaction avoir si on vous demande de calculer $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$?

Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}$. Cela sert, comme dans l'exerice 10, à prouver des résultats sur les sommes par récurrence :

Proposition 11 (somme géométrique)

Soit $q \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

<u>*Démontration :*</u>

Pour $q = 1$, il s'agit de $\sum_{k=0}^{n} 1 = n - 0 + 1 = n + 1$.

Pour $q \neq 1$,

$\square$

Exercice 14
Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

3 Récurrence double

Proposition 12 (récurrence double)
Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a $[\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)] \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 13
La preuve de cette proposition consiste à utiliser une récurrence simple en utilisant la propriété $\mathcal{Q}(n) = [\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)]$.

La rédaction d'une récurrence double est similaire à celle d'une récurrence simple. Il y a pourtant deux changements :

1. L'étape d'initialisation comporte *deux* points à démontrer : $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ (typiquement, démontrer que la propriété est vraie au rang 0 et au rang 1).
2. Pour l'hérédité, l'hypothèse de récurrence est que : $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. C'est là que réside l'intérêt d'une récurrence double : on dispose d'une hypothèse plus forte que dans une récurrence simple pour prouver la propriété au rang suivant.

Exercice 15
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2,\ u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

4 Récurrence forte

Proposition 14 (récurrence forte)
Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a $\Big[\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]\Big] \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 15
La preuve de cette proposition consiste à utiliser une récurrence simple en utilisant la propriété $\mathcal{Q}(n) = \Big[\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]\Big]$.

La rédaction d'une récurrence double est similaire à celle d'une récurrence simple. L'initialisation porte seulement sur le premier rang concerné. En revanche l'hypothèse de récurrence est bien plus forte : on peut utiliser que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$.

Exercice 16
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{n-1}+1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Émettre une conjecture sur la valeur de u_n pour tout n puis la démontrer.