DM 1 corrigé

TD1 :

exo 1.4 : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$,

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-2} > 0 \iff \frac{x(x-2)+x(x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0 \iff \frac{x(2x-3)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

On dresse alors un tableau de signes :

- $2x-3>0 \iff x > \frac{3}{2}$
- $x-1>0 \iff x>1$
- $x-2>0 \iff x>2$

x		0		1		$\frac{3}{2}$		2	
x	$-$	0			$+$				
$2x-3$			$-$			0		$+$	
$x-1$		$-$		0		$+$			
$x-2$				$-$				0	$+$
$\frac{x(2x-3)}{(x-1)(x-2)}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Donc l'ensemble des solutions est :

$S =]-\infty, 0[\cup]1, \frac{3}{2}[\cup]2, +\infty[$

exo 2.4 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{9} = 0 \iff \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \iff \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$
$$\iff x = 3$$

donc l'ensemble des solutions est $S = \{3\}$

exo 3.5 : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|x| = |2-x^2| \iff x = 2-x^2 \text{ ou } x = x^2-2$$
$$\iff x^2+x-2=0 \text{ ou } x^2-x-2=0$$

Le discriminant de X^2+X-2 est $1^2-4\times(-2)=9$, il a donc deux racines : $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $\frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$.

Le discriminant de X^2-X-2 est $(-1)^2-4\times(-2)=9$, il a donc deux racines : $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$

Finalement l'ensemble des solutions est $S = \{2, 1, -1, -2\}$.

exercice 8

1) Le discriminant de $-\frac{X^2}{12} - \frac{2X}{3} + \frac{5}{3}$ est

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{12}\right)\times\frac{5}{3} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$$

donc ses racines sont

$$\alpha = \frac{\frac{2}{3}+\sqrt{1}}{2\times\left(-\frac{1}{12}\right)} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{6}} = -\frac{5\times 6}{3} = -10$$

et $$\beta = \frac{\frac{2}{3}-\sqrt{1}}{2\times\left(-\frac{1}{12}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = 2.$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \{-10, 2\}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 2 \iff (x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2})$ (c'est du cours)

Donc l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^4 - 4x^2 \geq 0 \iff x^2(x^2-4) \geq 0$

Comme $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$, on a en fait :

$$x^2(x^2-4) \geq 0 \iff \begin{pmatrix} x^2-4 \geq 0 \\ \text{ou } x = 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x^2 \geq 4 \\ \text{ou } x = 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\ \text{ou } x = 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\cup \{0\}$

5) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|3x-2| > 1 \iff (3x-2 > 1 \text{ ou } 3x-2 < -1)$$
$$\iff (3x > 3 \text{ ou } 3x < 1)$$
$$\iff \left(x > 1 \text{ ou } x < \frac{1}{3}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$.