TD 1 exo 7

1) Notons $(*)$: $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$

Le discriminant de $X^2 - 2mX - m + 6$ est

$\Delta = 4m^2 - 4(-m+6) = 4(m^2 + m - 6)$

C'est le signe de Δ qui détermine le nombre de solution de $(*)$

Or le discriminant de $X^2 + X - 6$ est $\Delta = \dots = 25$ donc ce polynôme a 2 racines : $\alpha = \dots = 2$ et $\beta = \dots = 3$. Comme le coefficient dominant est positif on a :

(1) • $m^2 + m - 6 > 0 \iff m < 2$ ou $m > 3 \iff \Delta > 0$

(2) • $m^2 + m - 6 < 0 \iff 2 < m < 3 \iff \Delta < 0$

(3) • $m^2 + m - 6 = 0 \iff m = 2$ ou $m = 3 \iff \Delta = 0$

Ainsi dans le cas
- (1), $(*)$ a 2 solutions
- (2) —— 0 ——
- (3) —— 1 ——

2) Notons $(*)$: $x^4 - 2x^2 + m - 1 = 0$ ou encore $(x^2)^2 - 2x^2 + m - 1 = 0$

Le discriminant de $X^2 - 2X + m - 1$ est $\Delta = 4 - 4(m-1) = 4(2-m)$

Ainsi, • si $m > 2$ alors $\Delta < 0$ et donc $(*)$ n'a pas de solution.

• si $m = 2$ alors $\Delta = 0$ et $X^2 - 2X + m - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

ainsi $(*) \iff (x^2 - 1)^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff (x = 1$ ou $x = -1)$ et donc $(*)$ a 2 solutions

• si $m < 2$ alors $\Delta > 0$ donc $X^2 - 2X + m - 1$ a 2 racines :

$\alpha = \dots = 1 + \sqrt{2-m}$ et $\beta = \dots = 1 - \sqrt{2-m}$ et ainsi :

$(*) \iff (x^2 = 1 + \sqrt{2-m}$ ou $x^2 = 1 - \sqrt{2-m})$

$\iff (x = \sqrt{1 + \sqrt{2-m}}$ ou $x = -\sqrt{1 + \sqrt{2-m}}$ ou $x^2 = 1 - \sqrt{2-m})$

Pour poursuivre, il faut étudier le signe de $1 - \sqrt{2-m}$:

$1 - \sqrt{2-m} \geq 0 \iff \sqrt{2-m} \leq 1 \iff 2 - m \leq 1 \iff m \geq 1.$

Ainsi : • si $m \in]1, 2[$ alors $1 - \sqrt{2-m} > 0$ donc $x^2 = 1 - \sqrt{2-m}$ a 2 solutions et finalement $(*)$ a 4 solutions.

• si $m = 1$ alors $1 - \sqrt{2-m} = 0$ donc $x^2 = 1 - \sqrt{2-m}$ a une seule solution et finalement $(*)$ a 3 solutions

• si $m < 1$ alors $1 - \sqrt{2-m} < 0$ donc $x^2 = 1 - \sqrt{2-m}$ n'a pas de solu° et finale^t $(*)$ a 2 solu°