DS 1 - Corrigé

Exercice 1 : voir cours

Exercice 2 :

1) a)
```
def fun(x,y):
    a = x**2+2
    b = 2*y**(1/2)
    return a/b
```

b) fun(2,5) renvoie

$$\frac{2^2+2}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

2) a) Quand on demande mystere(1,4), Python calcule

$x = 1+\frac{4}{2} = 3$ puis $y = 2\times x + 1 = 2\times 3 + 1 = 7$

puis renvoie $\frac{y}{x} = \boxed{\frac{7}{3}}$.

b) De manière générale, pour mystere(a,b), Python calcule

$x = a+\frac{b}{2}$ puis $y = 2x + a = 2\left(a+\frac{b}{2}\right) + a = 3a+b$

puis renvoie $\frac{y}{x} = \frac{3a+b}{a+\frac{b}{2}} = \boxed{\frac{6a+2b}{2a+b}}$

Exercice 3 :

1) $\dfrac{\frac{4}{9}}{6} = \dfrac{4}{9\times 6} = \dfrac{2}{9\times 3} = \boxed{\dfrac{2}{27}}$

2) $\dfrac{10}{\frac{15}{6}} = \dfrac{10\times 6}{15} = \dfrac{2\times 5\times 2\times 3}{3\times 5} = \boxed{4}$

3) $(x+1)\times \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x(x+1)}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x^2(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{x^2(x+1)}{x+1} = \boxed{x^2}$

4) $2 - \dfrac{1-x}{x-2} = \dfrac{2(x-2)-(1-x)}{x-2} = \dfrac{2x-4-1+x}{x-2} = \boxed{\dfrac{3x-5}{x-2}}$

5) $x\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)^2 = x\sqrt{x}\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}} + (2\sqrt{x})^2\right)$

$$= x\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - 2 + 4x\right)$$

$$= \boxed{\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 4x^2\sqrt{x}}$$

Exercice 4 :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 2x + \frac{1}{4} \iff \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)x$$

$$\iff \frac{4-3}{12} = \frac{3}{2}x$$

$$\iff x = \frac{1}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{18}\right\}}$.

2) Le discriminant de $-2X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$ est

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times(-2)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

donc ce polynôme a deux racines :

$$\alpha = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2\times(-2)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{-4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2\times(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Comme de plus son coefficient dominant est $-2 < 0$, l'ensemble des solutions de l'équation $-2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq 0$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[}$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|3-x| = 6 \iff (3-x = 6 \text{ ou } 3-x = -6)$$
$$\iff (x = -3 \text{ ou } x = 9)$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \{-3, 9\}}$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(1-2x)^2 \geq 16 \iff (1-2x \geq \sqrt{16} \text{ ou } 1-2x \leq -\sqrt{16})$$
$$\iff (1-4 \geq 2x \text{ ou } 1+4 \leq 2x)$$
$$\iff \left(x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{5}{2}\right)$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[}$

5) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2.$$

Puis pour $x \in [-2, 2]$ on a :

$$\sqrt{4-x^2} < 1 \iff 4 - x^2 < 1^2$$
$$\iff x^2 > 3$$
$$\iff (x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3})$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_5 = [-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2]}$

6) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$ on a :

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{x+6}{x+4} \iff (2x-3)(x+4) = (x-1)(x+6)$$
$$\iff 2x^2 - 3x + 8x - 12 = x^2 - x + 6x - 6$$
$$\iff x^2 = 6$$
$$\iff (x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6})$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_6 = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}}$.

7) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$,

- $x-2=0 \iff x=2$

et
- $x^2-4=0 \iff x^2=4 \iff (x=2 \text{ ou } x=-2)$.

Puis, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ on a :

$$\frac{x}{x-2} > \frac{x^2+1}{x^2-4} \iff \frac{x}{x-2} - \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\iff \frac{x(x+2)-(x^2+1)}{(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\iff \frac{2x-1}{(x-2)(x+2)} > 0$$

On étudie alors les signes suivants :

- $2x-1>0 \iff x > \frac{1}{2}$
- $x-2>0 \iff x>2$
- $x+2>0 \iff x>-2$

afin de dresser le tableau de signes ci-dessous :

x		-2		$\frac{1}{2}$		2	
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{2x-1}{(x-2)(x+2)}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

On lit alors dans ce tableau que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_7 = \left]-2,\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]2,+\infty\right[.}$$

8) On commence par déterminer l'ensemble de définition :

- pour $x \in \mathbb{R}$, $x-1=0 \iff x=1$, puis :
- pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$2-\frac{x}{x-1}=0 \iff 2(x-1)-x=0 \iff x-2=0 \iff x=2.$$

Ainsi, on travaille finalement pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ et on a :

$$\frac{6}{2-\frac{x}{x-1}}=(x-1)^2 \iff \frac{6(x-1)}{2(x-1)-x}=(x-1)^2$$

$$\iff \frac{6(x-1)}{x-2}=(x-1)^2$$

$$\iff \left(x-1=0 \text{ ou } \frac{6}{x-2}=x-1\right)$$

$$\iff \left(x=1 \text{ ou } 6=(x-1)(x-2)\right)$$

$$\iff \left(x=1 \text{ ou } x^2-3x-4=0\right) \quad (*)$$

Le discriminant de X^2-3X-4 est $\Delta=(-3)^2-4\times(-4)=25$, ce polynôme a donc 2 racines : $\alpha=\frac{3+\sqrt{25}}{2}=4$ et $\beta=\frac{3-\sqrt{25}}{2}=-1$.

Ainsi, on a $(*) \iff (x=1 \text{ ou } x=4 \text{ ou } x=-1)$.

Comme on travaillait pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, l'ensemble des solutions est finalement $\boxed{\mathcal{S}_8=\{4,-1\}.}$

Exercice 5

1) Le discriminant de X^2-4X+3 est $(-4)^2-4\times1\times3=4$ donc ses racines sont $\frac{4+\sqrt{4}}{2}=3$ et $\frac{4-\sqrt{4}}{2}=1$.
Ainsi l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\mathcal{S}_1=\{1,3\}}$

2) Pour $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$x^4-4x^2+3=0 \iff (x^2)^2-4x^2+3=0 \iff \begin{cases} y=x^2 \\ y^2-4y+3=0 \end{cases} \quad (*)$$

On reconnaît alors l'équation (E_1) sur la deuxième ligne de ce système. Ainsi :

$$(*) \iff \begin{cases} y=x^2 \\ y=1 \text{ ou } y=3 \end{cases} \iff (x^2=1 \text{ ou } x^2=3)$$

$$\iff (x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3})$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\mathcal{S}_2=\{1,-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}}$

3) a) Pour $x\in\mathbb{R}$, on calcule que

$$\begin{aligned}
(x-1)^4-4(x-1)^2+3 &= (x-1)^2\times((x-1)^2-4)+3 \\
&= (x^2-2x+1)\times(x^2-2x+1-4)+3 \\
&= (x^2-2x+1)\times(x^2-2x-3)+3 \\
&= x^4-2x^3-3x^2-2x^3+4x^2+6x+x^2-2x-3+3 \\
&= x^4-4x^3+2x^2+4x
\end{aligned}$$

b) Tout d'abord, on remarque que $x=0$ n'est pas solution de l'équation (E_3) puisque $0^3-4\times0^2+2\times0+4\neq0$.
Ainsi, on peut se contenter de chercher les solutions de (E_3) appartenant à $\mathbb{R}^*$ et écrire que, pour $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$x^3-4x^2+2x+4=0 \iff \frac{x^4-4x^3+2x^2+4x}{x}=0$$

$$\iff \frac{(x-1)^4-4(x-1)^2+3}{x}=0$$

$$\iff (x-1)^4-4(x-1)^2+3=0 \quad (**)$$

On voit alors apparaître l'équation (E_2) puisque

$$(**) \iff \begin{cases} y = x-1 \\ y^4 - 4y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la question précédente, on obtient donc

$$(**) \iff \begin{cases} y = x-1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ ou } y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\iff \left(x-1 = 1 \text{ ou } x-1 = -1 \text{ ou } x-1 = \sqrt{3} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{3}\right)$$

$$\iff \left(x = 2 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1+\sqrt{3} \text{ ou } x = 1-\sqrt{3}\right)$$

Or on a vu qu'on travaillait ici pour $x \in \mathbb{R}^*$ et que 0 n'est pas solution de (E_3), finalement l'ensemble des solutions de (E_3) est donc $\boxed{\mathcal{S}_3 = \{2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}}$.

4) À nouveau, $x = 0$ n'est pas solution de (E_4), donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$1 - 4x + 2x^2 + 4x^3 = 0 \iff \frac{1 - 4x + 2x^2 + 4x^3}{x^3} = 0$$

$$\iff \frac{1}{x^3} - 4 \times \frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} + 4 = 0$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y^3 - 4y^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad (***)$$

On voit apparaître l'équation (E_3) résolue en 3)b) et ainsi :

$$(***) \iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 2 \text{ ou } y = 1+\sqrt{3} \text{ ou } y = 1-\sqrt{3} \end{cases} \iff \left(\frac{1}{x} = 2 \text{ ou } \frac{1}{x} = 1+\sqrt{3} \text{ ou } \frac{1}{x} = 1-\sqrt{3}\right)$$

$$\iff \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{1-\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_4) est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}}$