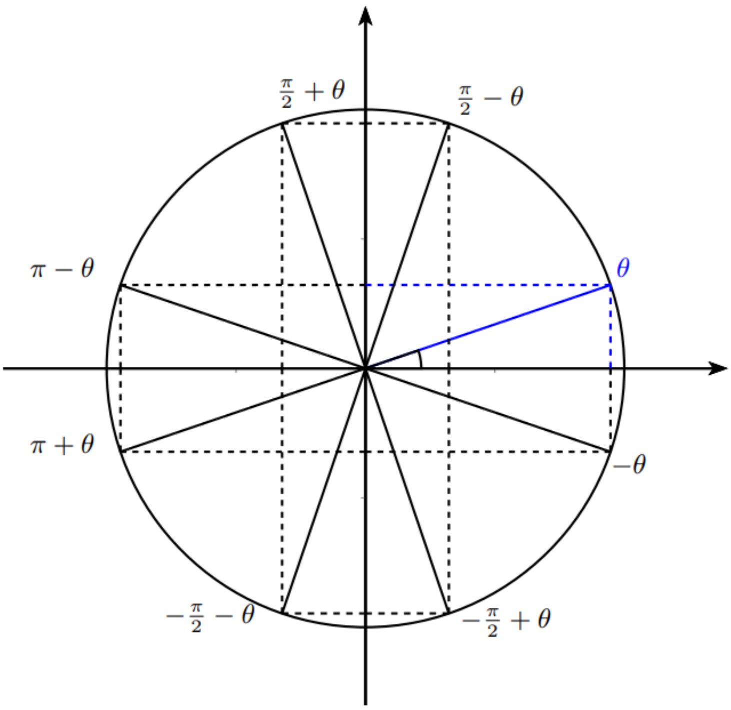
Feuille de cours 2 : trigonométrie

1 Tourner autour du cercle

On retrouve les formules suivantes en utilisant les symétries du cercle trigonométrique et le fait que :

- passer de θ à $\theta+\frac{\pi}{2}$ correspond à une rotation d'un quart de tour,
- passer de θ à $\theta+\pi$ correspond à une rotation d'un demi tour (i.e. à une symétrie centrale par rapport à l'origine),
- passer de θ à $-\theta$ correspond à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition 1
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$\cos(\theta+2\pi)=$	$\sin(\theta+2\pi)=$
Par conséqent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,	Par conséqent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$\cos(\theta+2k\pi)=$	$\sin(\theta+2k\pi)=$
$\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=$	$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=$
$\cos(\theta+\pi)=$	$\sin(\theta+\pi)=$
$\cos(-\theta)=$	$\sin(-\theta)=$

Exercice 1
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$\cos(\pi-\theta)=$	$\sin(\pi-\theta)=$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=$
$\cos(\theta-\pi)=$	$\sin(\theta-\pi)=$
$\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=$	$\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=$

Proposition 2
Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$\tan(\theta + \pi) =$

Par conséqent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$\tan(\theta + k\pi) =$

$\tan(-\theta) =$

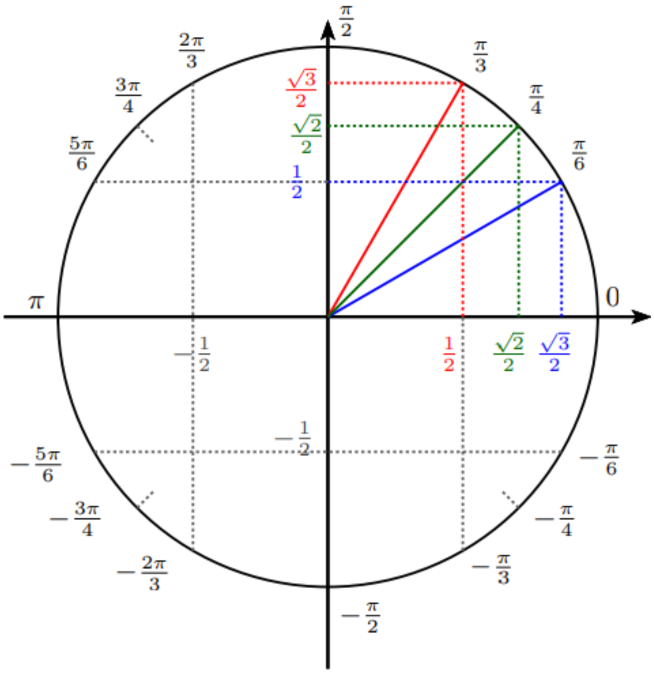
Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) =$

2 Valeurs particulières

Quelques mesures à connaître (en s'aidant du cercle)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration des valeurs usuelles :

- Les valeurs pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ ne posent pas de difficultés.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on est sur la droite d'équation $y = x$ donc on a $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Par conséquent, $1 = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4})$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.
  Comme de plus $\cos(\frac{\pi}{4}) \geq 0$ on a finalement, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, c'est l'angle d'un triangle équilatéral ! Si on note O l'origine du repère, A le point de coordonnées $(1,0)$ et M le point repéré par l'angle $\frac{\pi}{3}$, alors OAM est équilatéral. Ainsi, si on note H le projeté orthogonal de M sur $[OA]$, la hauteur $[MH]$ coupe le côté $[0A]$ en son milieu : $OH = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$.
  Enfin comme $\sin(\frac{\pi}{3}) \geq 0$, on a $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, on raisonne similairement dans le triangle équilatéral correspondant.

$\square$

On en déduit les autres cosinus et sinus usuels en se repérant sur le cercle. Par exemple, $\cos(-\frac{3\pi}{4}) =$ et $\sin(\frac{5\pi}{6}) =$.

Exercice 2

Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\cos(\frac{-5\pi}{6}) =$
2. $\sin(\frac{7\pi}{4}) =$
3. $\tan(\frac{2\pi}{3}) =$
4. $\cos(\frac{-8\pi}{3}) =$
5. $\sin(\frac{11\pi}{2}) =$
6. $\tan(\frac{-9\pi}{4}) =$