NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2pts). Donner sans justifier les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Question 2 (/2pts). Compléter, sans justifier, les équivalences suivantes avec des inégalités portant sur x :

- $x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$
- $|x| \geq 2 \iff x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -2$

Question 3 (/6pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Tout d'abord, d'une part $u_0 = 2$, d'autre part $\dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$.
Donc on a bien $u_0 = \dfrac{2}{2\times 0+1}$.

Supposons ensuite que $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1+2} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

ce qu'il fallait démontrer.
Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2pts). Donner sans justifier les formules suivantes :

$$\sum_{k=p}^{n} a = a(n-p+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Question 2 (/2pts). Compléter, sans justifier, les équivalences suivantes avec des inégalités portant sur x :

- $x^2 \geq 1 \iff x \geq 1$ ou $x \leq -1$
- $|x| < 2 \iff -2 < x < 2$

Question 3 (/6pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Tout d'abord, d'une part $u_0 = 0$, d'autre part $\dfrac{0}{0+1} = 0$.

Donc on a bien $u_0 = \dfrac{0}{0+1}$.

Supposons ensuite que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1)-n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.