On rappelle les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

$$\sum_{k=p}^{n} a =$$

Exercice 1
Caclulez les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} 2^k = \boxed{}$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} 3j = \boxed{}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} (i^2 - 2) = \boxed{}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \boxed{}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k - 1}{5} = \boxed{}$
6. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+2} n = \boxed{}$

Exercice 2
Calculez les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \boxed{}$
2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j 5^{n-j} = \boxed{}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + 1}{2^{2k}} = \boxed{}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \boxed{}$

Exercice 3
Calculez les sommes suivantes pour tout entier n approprié :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = \boxed{}$
2. $\displaystyle\sum_{k=-2}^{7} -2 = \boxed{}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 = \boxed{}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-3k} = \boxed{}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{3}^k = \boxed{}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = \boxed{}$

Exercice 4

Calculez les sommes suivantes pour tout entier n approprié :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^k = \boxed{}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2^{k+1}\right) = \boxed{}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2 \times 3^{2k-n} = \boxed{}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{n} = \boxed{}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \boxed{}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}} = \boxed{}$

Exercice 5

Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer la formule de Bernoulli :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

Exercice 6

1. Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q - q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$$

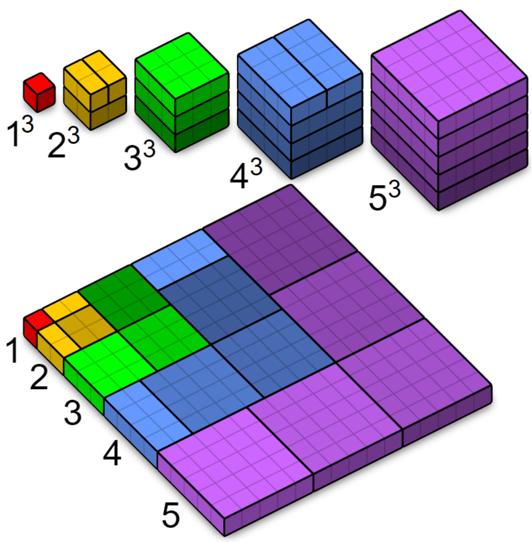
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{3^k}$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 8



Le dessin ci-contre illustre dans le cas $n = 5$ une égalité entre deux sommes de puissances d'entiers. On pourra consulter la version en couleur dans le fichier mis en ligne sur cahier de prépa.

De quelle égalité s'agit-il ? La démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.