Corrigé DM 2

FC 0.2 exo 9

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

Tout d'abord, pour $n = 0$, $\frac{1}{2^0} - 2 \times 0 + 1 = 2 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons ensuite que $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2} u_n - \frac{2n+3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 2n + 1\right) - \frac{2n+3}{2} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} - n + \frac{1}{2} - n - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} - 2n - 1 \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} - 2(n+1) + 1
\end{aligned}$$
donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, on a bien montré par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

2) On a, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k} - 2k + 1\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - n(n+1) + n + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{2^n} - n^2 - n + n + 1 \\
&= 3 - \frac{1}{2^n} - n^2.
\end{aligned}$$

TD 1 exo 5.4

On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$2-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

On distingue donc 2 cas :

cas 1 : si $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ alors $2-x^2 \geq 0$ donc $|2-x^2| = 2-x^2$.

Ainsi
$$\begin{aligned} |2-x^2| \leq 2x+1 &\iff 2-x^2 \leq 2x+1 \\ &\iff 2 \leq x^2+2x+1 \\ &\iff 2 \leq (x+1)^2 \\ &\iff (x+1 \geq \sqrt{2} \text{ ou } x+1 \leq -\sqrt{2}) \\ &\iff (x \geq \sqrt{2}-1 \text{ ou } x \leq -1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Comme on travaille ici pour $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, on obtient que, dans ce cas, les éléments de $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}]$ sont solutions.

cas 2 : si $x > \sqrt{2}$ ou $x < -\sqrt{2}$ alors $2-x^2 < 0$ donc $|2-x^2| = x^2-2$.

Ainsi
$$\begin{aligned} |2-x^2| \leq 2x+1 &\iff x^2-2 \leq 2x+1 \\ &\iff x^2-2x+1 \leq 4 \\ &\iff (x-1)^2 \leq 4 \\ &\iff -2 \leq x-1 \leq 2 \\ &\iff -1 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Comme on travaille ici pour $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$, on obtient que les éléments de $]\sqrt{2}, 3]$ sont solutions.

conclusion : L'ensemble des solutions est $S = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}] \cup]\sqrt{3}, 3]$
c'est-à-dire $S = [\sqrt{2}-1, 3]$.