

## Programme de colles : semaine 3, du 30/9 au 4/10

*Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.*

### 1 Logique

- raisonnement par récurrence. *Les récurrences double et forte ne sont pas au programme de colle.*

### 2 Premières sommes

*Les seules manipulations exigibles sont la définition :  $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=1}^n u_k$  et la linéarité. Réindication, retournement, télescopage et découpage (i.e. écrire par exemple  $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^{p-1} u_k$ ) n'ont pas été vus en classe.*

- somme d'une constante
- somme géométrique :  $\sum_{k=0}^n q^k$
- sommes d'Euler :  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$
- linéarité de la somme
- preuve de la valeur d'une somme par récurrence

### 3 Trigonométrie

*On adopte un point de vue géométrique. L'étude des fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques sera faite ultérieurement.*

*L'écriture sous forme phase-amplitude n'a pas été abordée en classe.*

- interprétation géométrique de la mesure d'un angle en radians, du cosinus, du sinus, de la tangente. Ensemble de définition de la tangente.
- rotations, symétries.
- valeurs usuelles de sin, cos, tan (à savoir par cœur)
- formules  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ ,  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$ . Application : déterminer  $\cos(\frac{\pi}{8})$
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir par cœur :  $\cos(-\theta)$ ,  $\sin(-\theta)$ ,  $\tan(-\theta)$ ,  $\cos(a+b)$ ,  $\sin(a+b)$ ,  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir retrouver rapidement :  $\cos(a-b)$ ,  $\sin(a-b)$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  et  $\tan$  de  $\pm\theta \pm \pi$ ,  $\pm\frac{\pi}{2} \pm \theta$
- résolution d'équations trigonométriques sur  $\mathbb{R}$  ou sur un intervalle donné. On se ramène à  $\cos(\theta) = \cos(\phi)$ ,  $\sin(\theta) = \sin(\phi)$ ,  $\tan(\theta) = \tan(\phi)$ .
- résolution d'inéquations trigonométriques. *Pour les inéquations, on attend une justification par un dessin uniquement.*
- définition de arccos, arcsin, arctan. *Aucune propriété autre que la définition n'est exigible.* Résolution de  $\cos(x) = c$ ,  $\sin(x) = s$ ,  $\tan(x) = t$  lorsque  $c$ ,  $s$  et  $t$  ne correspondent pas à des valeurs usuelles.

## 4 Informatique en langage Python

*L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances  $1/2$ .*

- booléens : constructions avec `==`, `!=`, `>=` et avec les opérateurs `not`, `and`, `or`. Savoir tester si un entier est multiple d'un autre.
- structure conditionnelle `if`, `else`, `elif`.

## 5 Questions de cours

*Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :*

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n \geq n + 1$ .
2. Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2}$ . Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 1$ .
3. Donner et démontrer par récurrence la valeur de  $\sum_{k=1}^n k$ .
4. Donner la valeur de  $\sum_{k=1}^n k^2$  et/ou de  $\sum_{k=0}^n q^k$ .
5. Écrire une fonction Python `valabs` prenant en argument un réel  $x$  et renvoyant  $|x|$ .
6. Indiquer sur le cercle trigonométrique la définition géométrique du cosinus, du sinus et de la tangente, et donner l'ensemble de définition de la fonction tangente.
7. Donner le cosinus, le sinus et la tangente d'un multiple de  $\pi/6$  ou de  $\pi/4$  choisi par l'examineur.
8. Donner la formule de  $\cos(a + b)$  (resp.  $\sin(a + b)$ ) et en déduire celle de  $\cos(a - b)$  (resp.  $\sin(a - b)$ ).
9. Donner la formule exprimant  $\cos(2a)$  en fonction de  $\cos(a)$ . En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .
10. Donner la définition de `arccos`, `arcsin` ou `arctan`.
11. Écrire une fonction Python  $f$  prenant en argument un réel  $x$  et renvoyant  $f(x)$  défini par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

*La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :*

- Remédiation 3, exos 1, 2, 3 : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5238>

*La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.*