Devoir maison n°3
À rendre le lundi 7 octobre 2024
une copie pour 2 élèves

Exercice 1

Extrait de la remédiation 3, exercice 7.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 2

Extrait d'un DS donné une année précédente.

1. (a) Rappeler le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction tan et donner le domaine de définition $\mathcal{D}_2$ de la fonction $x \longmapsto \tan(2x)$.
   (b) Pour tout $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2$, exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
   (c) En déduire que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.
2. On considère l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$(E) : \qquad \left(2 - \sqrt{2}\right)\cos^2(x) + \sqrt{2}\sin^2(x) - \sin(2x) = 0.$$

   (a) Justifier que les solutions de l'équation (E) appartiennent à $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, le réel x est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\tan^2(x) - \sqrt{2}\tan(x) + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

   (c) Montrer que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
   (d) Résoudre alors l'équation (E) en utilisant le résultat de la question 1(c).