Remédiation 3, exo 4

1) $\sum_{k=0}^{n} n^k = \begin{cases} n+1 = 2 & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1-n^{n+1}}{1-n} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$

2) $\sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\,\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 - 2^{n+2}$

3) corrigé en classe

4) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{2k-1}{n} = \dfrac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2} - (n-0+1)\times\dfrac{1}{n}$

$= n+1 - \dfrac{n+1}{n} = n - \dfrac{1}{n}$

5) $\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

6) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^{2k-3}} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(3^2)^k \times 3^{-3}} = 3^3 \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{9}\right)^k$

$= 27 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} = 27 \times \dfrac{9}{8}\left(1 - \dfrac{1}{9^{n+1}}\right) = 27 \times \dfrac{9-9^{-n}}{8}.$

exo 8 :

Il s'agit de l'identité $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ càd $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Prouvons-le par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- pour $n=1$: d'une part $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

donc on a bien $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

- Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= \dfrac{(n+1)^2}{4} \times \left(n^2 + (n+1)\times 4\right) = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

ce qu'il fallait démontrer.