Exercice 1

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.

Tout d'abord, $u_0 = \dfrac{1}{2} \in]0,1]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons ensuite que $0 < u_n \leq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors on a :

$$\begin{aligned}
0 < u_n \leq 1 \ \text{ donc } & \ 0 < \sqrt{u_n} \leq \sqrt{1} \leq 1 \\
\text{donc } & \ 2 > 2 - \sqrt{u_n} \geq 2 - 1 \geq 1 \\
\text{donc } & \ \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}} \leq \frac{1}{1} \leq 1 \\
\text{donc } & \ \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1 \\
\text{donc } & \ 0 < u_{n+1} \leq 1 \ \text{ ce qu'il fallait démontrer.}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 2

1. (a) On a $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2x)$ est bien défini si et seulement si $2x \in \mathcal{D}$. Or pour $k \in \mathbb{Z}$, $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) Soit $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2$, on a $\cos(x) \neq 0$ (car $x \in \mathcal{D}$) donc :

$$\begin{aligned}
\tan(2x) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \\
&= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\cos^2(x) - 1} \\
&= \frac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \cos^2(x)}{(2 - \frac{1}{\cos^2(x)}) \times \cos^2(x)} \\
&= \frac{2\tan(x)}{2 - \frac{1}{\cos^2(x)}}.
\end{aligned}$$

   Pour conclure, on utilise la relation classique suivante :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

   On obtient finalement que

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{2 - (1 + \tan^2(x))} = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x).}$$

   (c) En utilisant 1.(b) avec $x = \frac{\pi}{8}$ on obtient

$$\frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})} = \tan(2 \times \frac{\pi}{8}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

Ainsi $2\tan(\frac{\pi}{8}) = 1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})$ ou encore $\tan^2(\frac{\pi}{8}) + 2\tan(\frac{\pi}{8}) - 1 = 0$. Donc $\tan(\frac{\pi}{8})$ est racine du polynôme $X^2 + 2X - 1$. On calcule que les racines de ce polynôme sont $\sqrt{2}-1$ et $-\sqrt{2}-1$. Ainsi $\tan(\frac{\pi}{8})$ vaut ou bien $\sqrt{2}-1$ ou bien $-\sqrt{2}-1$. Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\tan\frac{\pi}{8} > 0$; par conséquent $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \mathcal{D}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. En en déduit que $\cos(x) = 0$, $\sin(x) \in \{1, -1\}$ et $\sin(2x) = 0$.
Ainsi $(2-\sqrt{2})\cos^2(x) + \sqrt{2}\sin^2(x) - \sin(2x) = \sqrt{2}$ et donc x n'est pas solution de l'équation.

   Par contraposée, toute solution de l'équation appartient à $\mathcal{D}$.

   (b) Soit $x \in \mathcal{D}$; on a $\cos(x) \neq 0$ donc

$$\begin{aligned}
&(2-\sqrt{2})\cos^2(x) + \sqrt{2}\sin^2(x) - \sin(2x) = 0 \\
\iff &(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = 0 \\
\iff &\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + \tan^2(x) - \frac{2}{\sqrt{2}}\tan(x) = 0 \\
\iff &\tan^2(x) - \sqrt{2}\tan(x) + \sqrt{2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

   (c) On a $(\sqrt{2}-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$, donc $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1|$. Comme $\sqrt{2} \geq 1$, on a $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ et donc finalement $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

   (d) D'après la question 2.(a), on sait que les solutions de (E) appartiennent à $\mathcal{D}$. On raisonne donc pour $x \in \mathcal{D}$ et on a :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } (E) &\iff \tan^2(x) - \sqrt{2}\,\tan(x) + \sqrt{2} - 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ y^2 - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2} - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)
\end{aligned}$$

   Le polynôme $P(X) = X^2 - \sqrt{2}X + \sqrt{2} - 1$ a pour discriminant
$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2}-1) = 2(3-2\sqrt{2})$ et on a, en utilisant la question 2.(c) :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}.$$

   Donc les racines de P sont $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\Delta}}{2} = 1$ et $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{2} - 1$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
(*) &\iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ y = 1 \ \text{ ou } \ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \\
&\iff (\tan(x) = 1 \ \text{ ou } \ \tan(x) = \sqrt{2} - 1) \\
&\iff (\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{4}) \ \text{ ou } \ \tan(x) = \tan(\frac{\pi}{8})) \ \text{ (en utilisant la question 1.(c))} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{8} + k\pi
\end{aligned}$$

   Finalement l'ensemble des solutions de (E) est $\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.