Boucles for (2) TP5

Exercice 1 Simple !

Q1 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n où $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite donnée par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3n}{2n+1}$. On vérifiera que u_5 vaut environ $1,501587$.

Q2 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant v_n où $(v_n)_{n\geq 1}$ est la suite donnée par : $v_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ v_n = (v_{n-1} + n)^2$. On vérifiera que v_5 vaut $480\,004\,281$.

Q3 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2k+n+1}$. On vérifiera que S_{10} vaut environ $2,30543$.

Exercice 2 Double !

Q1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{1+u_n}$. Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n. On vérifiera que u_4 vaut environ $0,1111$.

Q2 Même question pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-2}^2}$. On vérifiera que a_5 vaut environ $2,89$.

Q3 Même question pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \dfrac{nx_n + 1}{n^2 + x_{n+1}}$. On vérifiera que x_6 vaut environ $0,139$.

Exercice 3 Évolution d'une population de bactéries

On cultive des bactéries en laboratoire et on sait que chaque jour le nombre de bactéries augmente de $\tau\,\%$ où τ est un nombre réel fixé. On appelle B_0 le nombre de bactéries au début de l'expérience, et B_n le nombre de bactéries après n jours.

Q1 (Sans ordinateur). Écrire la relation entre B_n, B_{n+1} et τ.

Q2 Écrire une fonction `population` prenant en arguments le nombre initial de bactéries, le taux de croissance τ, et le nombre `n` d'années considérées. Cette fonction renverra le nombre de bactéries après `n` jours.

Q3 Vérifier que pour une population initiale de 425 bactéries et une croissance de 1.94% par jour, on compte 756 bactéries après 30 jours.

Exercice 4 Monotonie

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

Q1 Écrire une fonction `suite` prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n. (Testez votre fonction !!)

Q2 La suite (u_n) vous semble-t-elle monotone ? On ne demande pas de démonstration mathématique, mais d'utiliser l'ordinateur.
Même si l'ordinateur ne suffira pas pour *prouver* que (u_n) est bien décroissante, il peut prouver[1] qu'elle l'est jusqu'à un certain rang.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante jusqu'au rang $N \in \mathbb{N}$ lorsque : $\forall n \in [\![0, N]\!],\ u_n \geq u_{n+1}$.

Q3 Écrire une fonction `decroissante` prenant en argument $N \in \mathbb{N}$ et renvoyant `True` si la suite (u_n) étudiée dans cet exercice est décroissante jusqu'au rang N et `False` sinon. On utilisera la fonction `suite` au sein de la fonction `decroissante`.

Q4 Était-ce une bonne idée d'utiliser la fonction `suite` au sein de la fonction `decroissante` ? Coder une fonction `decroissante_bis` plus efficace.

1. si on fait abstraction des erreurs de calculs dues à l'utilisation d'arrondis par Python...