Partie A : exponentielle

On rappelle les règles de calcul sur la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On renvoie au cours sur les fonctions usuelles pour les démonstrations de ces propriétés.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \simeq$
Les règles de calcul sont similaires à celles sur les calculs de puissances :

Proposition 1

1. $e^0 =$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a+b} =$

3. $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} =$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a-b} =$

5. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ e^{ab} =$

6. $\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{e^a} =$

Proposition 2
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 0$.

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{2x}e^{1-2x} = \boxed{}$
2. $\left(e^{2x-1}\right)^2 e^{3x+4} = \boxed{}$
3. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = \boxed{}$
4. $\dfrac{e^{3x}}{e^{-x}\left(e^{-3x}\right)^2} = \boxed{}$

Exercice 2
Montrer les identités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Exercice 3
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$
2. $e^{x-y^2}\left(e^{y^2-x}\right)^2$

Exercice 4
Montrer les identités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = 4$

Partie B : logarithme népérien

On rapelle les règles de calcul sur la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. On renvoie au cours sur les fonctions usuelles pour les démonstrations de ces propriétés.

Proposition 3
On admet l'existence d'une fonction $\ln : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\ln(1) = 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(a \times b) =$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) =$
5. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall b \in \mathbb{R},\ \ln(a^b) =$
6. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(\sqrt{a}) =$

Proposition 4

1. $\ln(e) = 1$
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ \ln(e^a) = a$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ e^{\ln(a)} = a$

Remarque 1
Attention, $\ln(a)$ n'a de sens . En particulier, $\ln(0)$ n'a pas de sens.
On vérifiera toujours que l'argument du logarithme est strictement positif. Par exemple : l'identité

$$\ln((x-1)(x-2)) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$$

est vraie pour

et fausse pour

Remarque 2
Attention, il n'y a pas de formule pour $\ln(a+b)$ ou $\ln(a-b)$! On ne peut pas non plus simplifier $\ln(a) \times \ln(b)$ ou $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$!

Exercice 5
Écrire avec un seul logarithme népérien les quantités suivantes :

1. $3\ln(2) - \ln(16) + \ln(4) = \boxed{}$
2. $\ln(\frac{2}{3}) + \ln(\frac{3}{4}) + \ln(\frac{4}{5}) = \boxed{}$
3. $\ln(49) - \ln(\sqrt{7}) = \boxed{}$

Exercice 6
Démontrer les formules suivantes et préciser pour quelles valeurs de x elles sont correctes :

1. $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
2. $\ln(\sqrt{2x}) = \frac{\ln(x)+\ln(2)}{2}$
3. $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2-2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-2)$

Exercice 7
Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $\exp\left(\frac{1}{2}\ln(4)\right) = \boxed{}$
2. $\ln\left(\frac{e^x}{e^{2x-1}}\right) = \boxed{}$
3. $\exp\left(\frac{1}{2}\ln(\sqrt{e^x})\right) = \boxed{}$

Exercice 8
Écrire avec un seul logarithm népérien les quantités suivantes :

1. $\frac{1}{2}\ln(4) - 4\ln(\frac{1}{2})$
2. $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Exercice 9
Simplifiez pour $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$:

1. $\ln\left(\frac{x^2y}{z^3}\right) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z)$
2. $\exp(-\frac{1}{2}\ln(x))$
3. $\ln\left(\frac{e^x}{(e^y)^2}\right)$