Mathématiques - mercredi 9 octobre 2024
Devoir nº2 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 6 exercices.**
- **L'exercice 1 est à rédiger sur une copie séparée.**

Exercice 1.

1. Écrire une fonction Python `f` prenant en argument un nombre réel x et renvoyant :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
2. Écrire une fonction Python `test` prenant en arguments deux réels x et y et renvoyant `True` si le cube de leur somme est égale à la somme de leurs carrés. *On prendra soin d'écrire la fonction de la manière la plus simple possible.*
3. Écrire une fonction Python `somme` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$. Écrire une fonction Python `suite` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ en renvoyant la valeur de u_n.

Exercice 2.

1. Donner la définition de : “(u_n) est une suite arithmétique”.
2. Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{3}{2}u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ les sommes suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(n-2k)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k}$.

Exercice 3.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $2\sin(x) - 1 = 0$.
2. Résoudre sur $[0, 2\pi[$: $\cos(3x) = \sin(x)$.
3. Résoudre sur $[0, 2\pi[$: $\sin^2(x) < \dfrac{1}{4}$.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$.

1. Justifier que (u_n) est correctement définie.

On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

2. Justifier que (v_n) est correctement définie.

3. Montrer que (v_n) est géométrique puis en déduire l'expression de v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
On dispose de 2 verres, notés A et B, pouvant contenir chacun deux litres de liquide. Initialement, le verre A contient un litre de sirop, et le verre B contient un litre d'eau.
On propose d'effectuer plusieurs fois un mélange des deux liquides selon le protocole suivant :

i) on verse la moitié du verre A (c'est-à-dire $0,5$ litre) dans le verre B,

ii) on mélange le contenu du verre B,

iii) on verse un tiers du verre B (c'est-à-dire 0,5 litre) dans le verre A,

iv) on mélange le contenu du verre A.

À la fin de l'étape i), les verres A et B contiennent respectivement $0,5$ litre et $1,5$ litre de liquide ; et à la fin de l'étape iii), les verres A et B contiennent chacun 1 litre de liquide.
Les étapes ii) et iv) font qu'on peut toujours supposer que les verres contiennent des mélanges eau/sirop homogènes.
Les étapes i) à iv) sont répétées successivement.

On modélise cette situation en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n (respectivement b_n) le volume de sirop en litre contenu dans le verre A (respectivement le verre B) après la n-ème répétition du protocole. On alors

$$a_0 = 1 \ ; \ b_0 = 0 \ ; \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ (*) : \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}b_n \end{cases}$$

1. En suivant les étapes i) et iii), expliquez comment ont été obtenues les relations $(*)$.
2. Expliquez intuitivement pourquoi on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$ puis le démontrer par récurrence.
3. On introduit la suite $(u_n) = (a_n - b_n)$. Montrer que (u_n) est géométrique et déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ et $b_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.
5. Expliquez intuitivement combien valent $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, puis le démontrer grâce à l'expression donnée à la question précédente.

Exercice 6.
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les valeurs de $x = \cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ et $y = \sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

1. Placer l'angle $\dfrac{5\pi}{8}$ sur le cercle trigonométrique. Que peut-on en déduire sur les signes de x et de y ? Justifier.
2. Montrer que $x^2 - y^2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Que vaut $x^2 + y^2$?
4. En déduire les valeurs de x^2 et de y^2 puis celles de x et de y.
5. *Question bonus :* Simplifier les quantités $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{y}{x}$, puis en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\tan^4(t) - 6\tan^2(t) + 1 = 0$.